УДК 539.3

Математическое моделирование движения волновых пакетов в оболочках, близких к цилиндрическим

Т.В. Никонова, М.А. Дервоед
Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

При проектировании тонкостенных строительных конструкций необходимо исследовать вопросы потери устойчивости.

Цель статьи – построение математической модели, позволяющей решить начально-краевую задачу для уравнений в частных производных, описывающих волновые формы движения тонкой упругой оболочки, срединная поверхность которой мало отличается от цилиндрической.

Материал и методы. *Материал исследования – оболочка, близкая по форме к цилиндрической. Рассматривается параболический закон отклонения по продольной координате срединной поверхности. Для проведения исследования используется асимптотический комплексный ВКБ-метод.*

Результаты и их обсуждение. *Исходная двумерная начально-краевая задача сведена к системе Гамильтона, уравнению Риккати и последовательности одномерных начально-краевых задач для амплитудных функций. В случае параболического закона отклонения получена явная формула для частоты бегущих колебаний, а также функция Гамильтона, определяющая динамику волновых пакетов.*

Заключение. *Результаты могут быть использованы при исследовании устойчивости и вынужденных колебаний в цилиндрических оболочках, имеющих начальные погиби.*

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, близкая по форме к цилиндрической, волновой пакет, частота колебаний.*

Mathematical Modeling of the Motion of Wave Packets in Shells Close in Form to Cylindrical

T.V. Nikonova, M.A. Dervoyed
Educational Establishment «Vitebsk State Technological University»

Design of thin building structures requires the study of loss of stability issues.

The aim of the article is to construct a mathematical model that allows solving the initial-boundary value problem for partial differential equations describing the wave forms of motion of a thin elastic shell, the middle surface of which differs little from a cylindrical one.

Material and methods. *The object of investigation is a shell that is close in form to a cylindrical. The parabolic law of deviation along the longitudinal coordinate of the middle surface is considered. To carry out the research, we use the asymptotic complex WKB method.*

Findings and their discussion. *The original two-dimensional initial-boundary value problem is reduced to the Hamiltonian system, the Riccati equation and the sequence of one-dimensional initial-boundary value problems for amplitude functions. In the case of a parabolic deviation law, an explicit formula for the frequency of traveling oscillations is obtained, as well as the Hamiltonian function, which determines the dynamics of the wave packets.*

Conclusion. *The findings can be used to study the stability and forced oscillations in cylindrical shells that have initial deaths.*

Key words: *cylindrical shell, similar in shape to cylindrical shell, wave packet, oscillation frequency.*

При проектировании тонкостенных строительных конструкций необходимо проводить анализ напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего в оболочке при заданных внешних нагрузках и условиях закрепления краев, а также исследовать вопросы потери устойчивости. Исследование устойчивости и вынужденных колебаний в цилиндрических оболочках, имеющих начальные погиби, обусловленные технологическими неточностями, обсуждалось в [1; 2]. При этом установлено, что даже небольшие отклонения в форме срединной поверхности от цилиндрической существенно влияют на величину критической нагрузки, частоты собственных колебаний.

Цель статьи – построение математической модели, позволяющей решить начально-краевую задачу для

Репозиторий ВГУ

уравнений в частных производных, описывающих волновые формы движения тонкой упругой оболочки, срединная поверхность которой мало отличается от цилиндрической. Особенностью исследуемой задачи является предполагаемая локализация начальных условий (нормальных прогибов и скоростей точек срединной поверхности) вблизи некоторой образующей.

Материал и методы. Рассмотрим оболочку (рис.), поверхность которой задается векторным уравнением

$$\mathbf{r}(s,\theta)=R[\mathbf{r_0}+\mathbf{n_0}\varepsilon^2\eta(s,\theta)], \tag{1}$$

где $\mathbf{r_0}=\rho(\theta)+\mathbf{k}s$, s – координаты вдоль образующей кругового цилиндра с плоскими краями, θ – полярный угол, $\eta(s,\theta)$ – форма погиби, R – характерный размер, ε – естественный малый параметр, $\mathbf{r_0}$ – радиус-вектор точки на поверхности цилиндра, $\mathbf{n_0}$ – единичный вектор внешней нормали к цилиндру, определяемый по формуле:

$$\mathbf{n_0}=\mathbf{i}\cdot\frac{\rho\cos\theta+\rho'_\theta\sin\theta}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2_\theta}}+\mathbf{j}\cdot\frac{\rho\sin\theta-\rho'_\theta\cos\theta}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2_\theta}}. \tag{2}$$

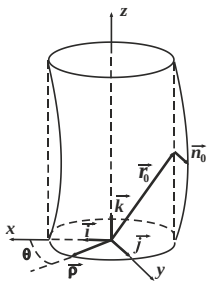

Рис. **Оболочка, близкая по форме к цилиндрической.**

Введем на поверхности оболочки ортогональную систему координат: s, φ, где s – продольная координата, а φ – координата по направляющей, выбираемая так, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2=R^2(ds^2+d\varphi^2)$.

Пусть оболочка ограничена двумя краями и необязательно замкнута в направлении φ:

$$-\frac{l}{2}\le s\le\frac{l}{2},\quad \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2. \tag{3}$$

Для исследования динамики волновых пакетов в данной оболочке будем использовать систему уравнений [3], записанную в безразмерном виде:

$$\varepsilon^4\Delta^2W+\Delta_kF+\varepsilon^2\frac{\partial^2W}{\partial t^2}=0,\quad \varepsilon^4\Delta^2\Phi-\Delta_kW=0, \tag{4}$$

где $\Delta z=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\right]$, $\Delta_kz=\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2}{A_1R_2}\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A_1}{A_2R_1}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\right.$ $\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\right]$, $A_1=A_2=1$, $A_{12}=0$ – коэффициенты первой квадратичной формы, $\frac{1}{R_1}=-\varepsilon^2\eta''_{ss}$, $\frac{1}{R_{12}}=\varepsilon^2\eta''_{s\varphi}$, $\frac{1}{R_2}=1$ – нормальные кривизны.

Тогда операторы примут вид: $\Delta z=\frac{\partial^2z}{\partial s^2}+\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}$, $\Delta_kz=\frac{\partial^2z}{\partial s^2}-\varepsilon^2\eta''_{ss}\frac{\partial^2z}{\partial\varphi^2}+2\varepsilon^2\eta''_{s\varphi}\frac{\partial^2z}{\partial\varphi\partial s}+\varepsilon^2\eta'''_{s\varphi\varphi}\frac{\partial z}{\partial s}$,

$\varepsilon^8=h^2/[12R^2(1-\nu^2)]$, $t=t_*T_*^{-1}$, $W=\varepsilon^4W_*R^{-1}$, $F=\varepsilon^{-4}F_*E^{-1}h^{-1}$, $T_*^2=\varepsilon^{-6}R^2\rho E^{-1}$, W_* F_* – нормальный прогиб и функция напряжений, t_* – время, ρ – плотность материала, ε – малый параметр, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, T_* – характерное время. Все рассматриваемые линейные величины отнесены к радиусу R.

В качестве граничных условий рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$W=\frac{\partial^2W}{\partial s^2}=0\quad\text{при}\quad s=\pm\frac{l}{2}. \tag{5}$$

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим задачу Коши для системы (4)

Репозиторий ВГУ

$$W\Big|_{t=0}=W_0^*(s,\varphi,\varepsilon)\Phi_0(\varphi,\varepsilon),\quad \dot{W}\Big|_{t=0}=i\varepsilon^{-1}V_0^*(s,\varphi,\varepsilon)\Phi_0(\varphi,\varepsilon),\quad \Phi_0(\varphi,\varepsilon)=\exp\left[i\varepsilon^{-1}\left(a_0\varphi+\frac{1}{2}ib_0\varphi^2\right)\right],\tag{6}$$

где i – мнимая единица, $b_0>0$, $a_0\neq0$ – вещественные числа, такие, что $\frac{\partial W_0^*}{\partial\varphi},\frac{\partial W_0^*}{\partial s},\frac{\partial V_0^*}{\partial\varphi},\frac{\partial V_0^*}{\partial s}\sim1$ при $\varepsilon\to0$. Перечисленные условия задают на поверхности оболочки начальный волновой пакет с изменяемостью ε^{-1} в направлении координаты φ и локализованный в окрестности образующей $\varphi=0$.

Функции W_0^*, V_0^* допускают разложение по системе собственных функций $z_1(s)$, $z_2(s)$,… $z_n(s)$…, в равномерно сходящиеся ряды:

$$W_0^*=\sum_{n=1}^{\infty}W_{n0}(\varphi,\varepsilon)z_n(s),\quad W_{n0}=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}W_0^*z_n ds,\quad V_0^*=\sum_{n=1}^{\infty}V_{n0}(\varphi,\varepsilon)z_n(s),\quad V_{n0}=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}V_0^*z_n ds\tag{7}$$

на отрезке $-\frac{l}{2}\le s\le\frac{l}{2}$. Введем новую переменную $\zeta=\varepsilon^{-1/2}\varphi$ и разложим в (7) все функции в ряды по степеням $\varepsilon^{1/2}\zeta$:

$$W_{n0}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m/2}w_{nm}^0(\zeta),\quad V_{n0}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m/2}v_{nm}^0(\zeta).\tag{8}$$

Здесь $w_{nm}^0(\zeta)$ – полиномы степени M_{nm} с комплекснозначными коэффициентами.

Решение задачи (5)–(7) для (4) будем искать в виде

$$W=\sum_{n=1}^{N}W_n,\quad V=\sum_{n=1}^{N}V_n,\tag{9}$$

где W_n, V_n – искомые функции, локализованные в момент времени t в окрестности некоторой образующей $\varphi=q_n(t)$. Пару функций W_n, V_n будем называть n-ым волновым пакетом с центром в точке $\varphi=q_n(t)$. Здесь $q_n(t)$ дважды дифференцируемая функция и $q_n(0)=0$.

Перейдя в (4) к новой системе координат, связанной с центром $q_n(t)$ по формуле

$$\varphi=q_n(t)+\varepsilon^{1/2}\xi_n,\tag{10}$$

получим систему уравнений, описывающую поведение n-го волнового пакета $n=\overline{1..N}$.

Решение полученной системы с начальными условиями (6) будем искать в виде:

$$\begin{gathered}W_n=W_n^*\Phi_n,\quad F_n=F_n^*\Phi_n,\quad W_n^*=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m/2}w_{nm}(s,\xi_n,t),\quad F_n^*=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m/2}f_{nm}(s,\xi_n,t),\\ \Phi_n=\exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1}\int_0^t\omega_n(\tau)d\tau+\varepsilon^{-1/2}p_n(t)\xi_n+\frac{1}{2}b_n(t)\xi_n^2\right]\right\},\end{gathered}\tag{11}$$

где ω_n, p_n, b_n – дважды дифференцируемые по t функции, $\operatorname{Im} b_n(t)>0$ для $\forall\ t>0$, а w_{nm}, f_{nm} – полиномы по ξ_n, $\omega_n(t)$ имеет смысл мгновенной частоты оболочки в окрестности центра $\varphi=q_n(t)$, $p_n(t)$ определяет изменяемость в направлении φ, а $b_n(t)$ характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра $\varphi=q_n(t)$.

Разложим функции $\eta'_{ss},\eta''_{s\varphi\varphi},\eta^{IV}_{s\varphi\varphi}$ в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon^{1/2}\xi_n$ в окрестности подвижной точки $\varphi=q_n(t)$, подставим полученное разложение и (11) в систему уравнений, описывающую поведение n-го волнового пакета. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε и исключив функции напряжений, приходим к последовательности краевых задач

$$\sum_{j=0}^{m}L_{nj}w_{n\,m-j}=0,\quad w_{nm}=\frac{\partial^2 w_{nm}}{\partial s^2}=0\ \text{при}\ s=\pm\frac{l}{2},\quad m=0,1,2\ldots,\tag{12}$$

где оператор $L_{n0}=\frac{1}{p_n^4(t)}\frac{\partial^4}{\partial s^4}+\frac{2}{p_n^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\eta''_{ss}+\left[p_n^4(t)-(\omega_n(t)-p_n(t)\dot{q}_n(t))^2+\eta''^2_{ss}\right]$,

$L_{n1}=\left(b_nL_p+L_q+\dot{p}_nL_\omega\right)\xi_n-iL_p\frac{\partial}{\partial\xi_n}$. Здесь L_p, L_q, L_ω – производные оператора L_{n0} по переменным p_n, q_n, ω_n соответственно.

В нулевом приближении решение краевой задачи ищем в виде

$$w_{n0}(s,\xi_n,t)=P_{n0}(\xi_n,t)z_n(s),\tag{13}$$

где $P_{n0}(\xi_n,t)$ – полином аргумента ξ_n, а $z_n(s)=\sin((\pi n-l/2)/l)$ – собственная функция, которой соответствует соб-

Репозиторий ВГУ

ственное значение $\lambda_n=\pi^4 n^4 l^{-4}$.

В качестве функции, описывающей отклонение срединной поверхности от цилиндрической, рассмотрим

$$\eta(s,\varphi)=m(\varphi)\left(\frac{l^2}{4}-s^2\right). \tag{14}$$

Тогда подстановка (13) в (12) с учетом (14) приводит к соотношению для мгновенной частоты ω_n:

$$\omega_n(t)=\dot{q}_n\ p_n(t)\mp H_n[p_n(t),q_n(t)], \tag{15}$$

где $H_n[p_n(t),q_n(t)]=\sqrt{p_n^4+\left(\frac{\pi^2 n^2}{p_n^2 l^2}+2m(\varphi)\right)^2}$ – гамильтониан уравнения (12).

Рассмотрение первого приближения краевых задач (12) дает возможность записать уравнение относительно $P_{n0}(\xi_n,t)$:

$$2b_n\xi_n HP_{n0}(\dot{q}_n-H_p)-2HH_qP_{n0}\xi_n-2iP'_{n0}H(\dot{q}_n-H_p)-2H\ \dot{p}_n\ \xi_nP_{n0}=0. \tag{16}$$

Так как $Im\ b_n(t)>0$ для $\forall t$, условием существования решения (16) в виде полинома по ξ_n является обращение функциями $p_n(t)$, $q_n(t)$ системы Гамильтона

$$\begin{cases}\dot{q}_n=H_p\\ \dot{p}_n=-H_q\end{cases} \tag{17}$$

в тождество, где $p_n(0)=0$, $q_n(0)=a_0$ – начальные условия для этих функций.

Рассмотрение условий разрешимости краевой задачи во втором приближении приводит к уравнению Риккати:

$$\dot{b}_n+H_{pp}b_n^2+2H_{pq}b_n+H_{qq}=0, \tag{18}$$

позволяющему найти функции $b_n(t)$, а также к амплитудному уравнению для определения коэффициентов $P_{n0}(\xi_n,t)$.

Заключение. Таким образом, с использованием асимптотического комплексного ВКБ-метода исходная двумерная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных начально-краевых задач. В случае параболического закона отклонения по продольной координате *s* срединной поверхности от цилиндрической выведена явная формула для частоты бегущих колебаний, полученная система Гамильтона дает возможность найти групповую скорость пакета $\dot{q}_n(t)$ и величину p_n(t), определяющую изменяемость в направлении φ. Для определения b_n(t), характеризующего скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра, записано уравнение Риккати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев, Г.И. Некоторые задачи устойчивости оболочек, близких к цилиндрическим / Г.И. Михасев // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер., Матем. Механ. Астрон. – 1987. – № 1. – С. 67–72.
2. Михасев, Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями / Г.И. Михасев // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, № 4. – С. 635–643.
3. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

REFERENCES

1. Mikhasev G.I. *Vestnik Leningr. universiteta Ser. Mat., Mekh., Astron.* [Journal of Leningrad University. Mathematics, Mechanics, Astronomy], 1987, 1, pp. 67–72.
2. Mikhasev G.I. *Prikl. mat. i mekh*. {Applied Mathematics and Mechanics], 1996, 60(4), pp. 635–643.
4. Tovstik P.E. *Ustoichivost tonkikh obolochek: asimptoticheskiye metodi* [Stability of Thin Shells: Asymptotic Methods], Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1995, 320 p.

Поступила в редакцию 28.04.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: st. rubon@mail.ru – Никонова Т.В.

Репозиторий ВГУ