3. Gurtin, M.E. On the diffusion of biological populations / M.E. Gurtin, R.C. MacCamy // Math. Biosc. – 1977. – V. 33. – P. 35–49.
4. Курдюмов, С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации / С.П. Курдюмов // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. – М.: Наука, 1982. – С. 217–243.
5. Гладков, А.Л. О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями / А.Л. Гладков // Мат. сборник. – 2000, Т. 191, № 3. – С. 25–42.
6. Храмцов, О.В. Относительная стабилизация одного нелинейного вырождающегося параболического уравнения / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 12. – С. 1650–1654.

ОБ ИНЪЕКТОРАХ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ДЛЯ МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА

М.Г. Семенов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Цель работы: расширить результат Баллестера-Болинше [1, Теорема 2.4.27] на тот случай, когда факторгруппа $G/G_{\mathscr{F}}$ является π-разрешимой, для $\pi = \sigma(\mathscr{F})$.

Все рассматриваемые нами группы являются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [2,3].

В теории конечных разрешимых групп известна теорема Гашюца-Фишер-Хартли [4] о том, что для любого класса Фиттинга F в любой конечной разрешимой группе существуют F-инъекторы и любые два из них сопряжены. В последующем Андерсоном [5] данный результат был доказан для произвольных множеств Фиттинга. Напомним, что непустое множество $\mathscr{F}$, состоящее из подгрупп группы *G*, называют множеством Фиттинга в *G*, если для него справедливы следующие утверждения:

(1) если $N \lhd S \in \mathscr{F}$, то $N \in \mathscr{F}$.

(2) если $H, K \in \mathscr{F}$ и $H, K \lhd HK$, то $HK \in \mathscr{F}$.

(3) если $S \in \mathscr{F}$, то $S^x \in \mathscr{F}$ для всех $x \in G$.

Заметим, что в работах [4, 5] задача существования и сопряженности инъекторов для множеств Фиттинга была решена в случае, когда *G* - разрешимая группа. Впервые расширение теоремы Гашюца-Фишер-Хартли и Андерсона на случай *π*-разрешимых групп было произведено Л.А. Шеметковым [6]: им было доказано, что если $\mathscr{X}$ - множество Фиттинга *π*-разрешимой группы *G*, где *π* состоит из всех простых делителей порядков всех групп из $\mathscr{X}$, то в *G* существуют $\mathscr{X}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

Также в исследованиях, проводимых в данном направлении, известен результат Баллестера-Болинше [1, Теорема 2.4.27] о существовании и сопряженности инъекторов группы *G* для множеств Фиттинга в случае, когда факторгруппа $G/G_{\mathscr{F}}$ является разрешимой.

Нам удалось расширить результат Баллестера-Болинше на случай когда факторгруппа $G/G_{\mathscr{F}}$ является π-разрешимой, для $\pi = \sigma(\mathscr{F})$.

Напомним ключевые определения и свойства инъекторов для множеств Фиттинга, которые используются при доказательстве основного результата.

Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы *G* и *H* подгруппа группы *G*. Тогда $\mathscr{F}$ порождает множество Фиттинга в *H*, состоящее из тех членов $\mathscr{F}$, которые содержатся в *H*. В дальнейшем мы будем обозначать такое множество $\mathscr{F}_H$ или просто $\mathscr{F}$, если будет очевидно, что речь идет о $\mathscr{F}_H$. Заметим, что если $H \lhd G$, то $\mathscr{F}_H = \{S \cap H \mid S \in \mathscr{F}\}$ и $\mathscr{F}_H$ - множество Фиттнига в *G*.

Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы *G*. Через $G_{\mathscr{F}}$ обозначают подгруппу группы *G*, порожденную всеми нормальными подгруппами группы *G*, принадлежащими $\mathscr{F}$. Тогда $G_{\mathscr{F}}$ является единственной максимальной нормальной подгруппой группы *G*, принадлежащей $\mathscr{F}$ и называется $\mathscr{F}$-радикалом группы *G*.

Лемма 1.1. [2 VIII.2.4] *Пусть N является субнормальной подгруппой группы G. Тогда* $N_{\mathscr{F}} = G_{\mathscr{F}} \cap N$.

Определение 1.1. [2 VIII.2.5] *Пусть $\mathscr{F}$ – множество подгрупп группы G.*

(a) $\mathscr{F}$-подгруппу V группы G называют $\mathscr{F}$-максимальной, если из $V \le W \le G$ *и* $W \in \mathscr{F}$ *следует, что* $V = W$.

(b) $\mathscr{F}$-инъектор группы G – это такая подгруппа V, что подгруппа $V \cap K$ *является $\mathscr{F}$-максимальной в K для любой субнормальной подгруппы K из G.*

Лемма 1.2. [6] *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G, где* $\pi = \sigma(\mathscr{F})$*. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Лемма 1.3. [5] *Пусть A – нормальная подгруппа группы G. Тогда:*

(1) Если $\mathscr{F}$ –множество Фиттинга группы G и $A \in \mathscr{F}$, *то* $\overline{\mathscr{F}} = \{S/A \mid A \le S \in \mathscr{F}\}$ *- множество Фиттинга группы G/A. Более того если V - $\mathscr{F}$-инъектор группы G, то V/A является $\overline{\mathscr{F}}$-инъектором группы G/A.*

(2) Если $\overline{\mathscr{F}}$ - множество Фиттинга группы G/A и V/A является $\overline{\mathscr{F}}$-инъектором группы G/A, то $\mathscr{F}_0 = \{S \le G \mid (SA)/A \in \overline{\mathscr{F}}$ *и S субнормальна в SA*$\}$ *- множество Фиттинга группы G и V - $\mathscr{F}_0$–инъектор группы G.*

(3) Если V - инъектор группы G, то $(VA)/A$ *- инъектор группы G/A.*

Основным результатом данной работы является

Теорема 1.1. *Пусть $\mathscr{F}$–множество Фиттинга группы G. Пусть* $G/G_{\mathscr{F}}$ *является π-разрешимой группой, где* $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. *Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$ –инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Доказательство (Теорема 1.1).

Множество $\mathscr{F}^* = \{H/G_{\mathscr{F}} : H \in \mathscr{F}, G_{\mathscr{F}} \le H\}$ является множеством Фиттинга группы $G/G_{\mathscr{F}}$. Заметим, что $\sigma(\mathscr{F}^*) \subseteq \sigma(\mathscr{F})$ и $G/G_{\mathscr{F}}$ является π-разрешимой группой, где $\pi = \sigma(\mathscr{F}^*)$. Из леммы 1.3 следует, что

$$\mathscr{F}_0 = \{S \le G : SG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}^* \textit{и } S \textit{ субормальна в } SG_{\mathscr{F}}\}$$

является множеством Фиттинга группы G. Докажем, что для любой субнормальной подгруппы K из G справедливо равенство $K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{F}_0}$. Заметим, что $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$. Но $K_{\mathscr{F}} G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$ и $K_{\mathscr{F}} G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}^*$. Тогда, $K_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}_0$. Следовательно, $K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{F}_0}$.

Заметим, что, по лемме 1.2, в $G / G_{\mathscr{F}}$ существуют $\mathscr{F}^*$-инъекторы. Из леммы 1.3 следует, что если $V / G_{\mathscr{F}}$ является $\mathscr{F}^*$-инъектором группы $G / G_{\mathscr{F}}$, то V является $\mathscr{F}_0$-инъектором группы G. Докажем, что V также является $\mathscr{F}$-инъектором группы G. Для этого нам достаточно доказать, что для любой субнормальной подгруппы K из G подгруппа $K \bigcap V$ является $\mathscr{F}$-максимальной в K. Пусть существует такая группа $W \in \mathscr{F}$, что $K \bigcap V \leq W \leq K$. Тогда

$$(K \bigcap V) G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}} = (V / G_{\mathscr{F}}) \bigcap (K G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}}) \leq W G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}} \leq K G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}}.$$

Заметим, что $K \bigcap V$ является $\mathscr{F}_0$-инъектором группы K. Тогда $K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{F}_0} \leq V \bigcap K \leq W$ и $K_{\mathscr{F}} \leq W$. Но, по лемме 1.1, $K_{\mathscr{F}} = K \bigcap G_{\mathscr{F}}$ и $W G_{\mathscr{F}} \bigcap K = W(G_{\mathscr{F}} \bigcap K) = W K_{\mathscr{F}} = W$. Следовательно, W субнормальна в $W G_{\mathscr{F}}$ и $W G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$. Тогда $W G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}^*$. Ввиду $\mathscr{F}$-максимальности $(V / G_{\mathscr{F}}) \bigcap (K G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}})$ в $K G_{\mathscr{F}} / G_{\mathscr{F}}$ справедливо равенство $(K \bigcap V) G_{\mathscr{F}} = W G_{\mathscr{F}}$. Значит,

$$K \bigcap V = (K \bigcap V)(G_{\mathscr{F}} \bigcap K) = (K \bigcap V) G_{\mathscr{F}} \bigcap K = W G_{\mathscr{F}} \bigcap K = W.$$

Следовательно, V является $\mathscr{F}$-инъектором группы G.

Докажем сопряженность инъекторов в G. Пусть V является $\mathscr{F}$-инъектором группы G. Тогда, $V / G_{\mathscr{F}}$ является $\mathscr{F}^*$-инъектором группы $G / G_{\mathscr{F}}$. Но, по лемме 1.3, $\mathscr{F}^*$-инъекторы группы $G / G_{\mathscr{F}}$ сопряжены. Следовательно, $\mathscr{F}$-инъекторы группы G также сопряжены.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Ballester-Bolinches , A. *Classes of Finite Groups* / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro – Springer, 2006. – 385 p.
2. Doerk, K. *Finite Soluble Groups* / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter De Gruyter: Berlin-New York, 1992. – 891 p.
3. Шеметков, Л. А. *Формации конечных групп* / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.
4. Fischer, B. *Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen* / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley - Math. Z. – 1967. – № 102. – S. 337-339.
5. Anderson, W. *Injectors in finite solvable groups* / W. Anderson – Journal of algebra – 1975. – Vol. 36. – P. 333-338.
6. Шеметков, Л.А. *О подгруппах π-разрешимых групп* / Л. А. Шеметков - Конечные группы. - Минск: Наука и техника, 1975. - С.207-212.