

Заключение. Таким образом, в статье построены дифференциальные аналоги итерационных процессов Вейерштрасса и Ньютона-Канторовича одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения. Доказано, что подмножество пространства начальных условий, для которого все траектории стремятся к одной из перестановок корней, является открытым и связным, при этом отображение данного подмножества на множество значений коэффициентов уравнения является диффеоморфизмом. Доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояний равновесия; исследованы вопросы продолжимости решений. Проведенные численные вычисления показывают высокую эффективность такого процесса: задача Коши, решаемая для соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеет траекторию, быстро приближающуюся к вектору корней алгебраического уравнения при «почти любых» начальных условиях.

Список литературы

1. Трубников, Ю.В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, И.А. Орехова. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2011. – 95 с.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ ВОЗВРАТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, Сунь Байюй
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Алгоритм Вейерштрасса [1] является эффективным алгоритмом одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения произвольной степени. В настоящей работе исследован класс алгебраических уравнений, для которых вопрос выбора вектора начального приближения решается полностью – это класс возвратных алгебраических уравнений [2].

Материал и методы. Объектами исследования являются: итерационный процесс Вейерштрасса, возвратные алгебраические уравнения. В качестве метода исследования применяется теория определителей, свойства неявных функций и некоторые общие теоремы функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим алгебраическое уравнение:

$$P_{2n}(z) \equiv z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} z + a_{2n} = 0, \quad (a_0 = 1) \quad (1)$$

с действительными коэффициентами: a_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$), удовлетворяющими равенствам:

$$a_{n+k} = a_{n-k} r^{2k} \quad (r > 0, \quad 1 \leq k \leq n). \quad (2)$$

Лемма 1. Подстановка

$$y = z + \frac{r^2}{z} \quad (3)$$

приводит уравнение (1) к виду:

$$\Delta_n + a_1 \Delta_{n-1} + a_2 \Delta_{n-2} + \dots + a_{n-1} \Delta_1 + a_n \Delta_0 = 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = z + \frac{r^2}{z}, \quad \Delta_2 = z^2 + \frac{r^4}{z^2}, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} = z^{n-1} + \frac{r^{2(n-1)}}{z^{n-1}}, \quad \Delta_n = z^n + \frac{r^{2n}}{z^n},$$

при этом величины Δ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) можно выразить через степени переменной y из следующей системы линейных относительно Δ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_0 & & & & & = 1, \\ & \Delta_1 & & & & = y, \\ 2r^2\Delta_0 & + & \Delta_2 & & & = y^2, \\ & 3r^2\Delta_1 & + & \Delta_3 & & = y^3, \\ 6r^2\Delta_0 & + & 4r^2\Delta_2 & + & \Delta_4 & = y^4, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases} \quad (5)$$

где структура k -го уравнения системы (5) зависит от четности k .

Для выяснения геометрического смысла равенств (2) доказана

Теорема 1. Необходимыми и достаточными условиями расположения всех корней уравнения (1) с действительными коэффициентами на окружности $|z| = r$ являются равенства (2) и локализация всех корней уравнения (4) на отрезке $-2r \leq y_j \leq 2r$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Для уравнений вида (1), все корни которых расположены на окружности $|z| = r$ значение r определяется сразу же: $r = \sqrt[n]{a_{2n}}$, а для системы косинусов $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, \cos \varphi_n$ эффективным образом [2] строится алгебраическое уравнение n -й степени, все корни которого расположены на отрезке $[-1; 1]$, т.е., решается проблема выбора начального вектора. Кроме того, при $n = 1, 2$ для корней уравнения (1) получаются удобные аналитические выражения, содержащие не только радикалы.

Например, при $n = 1$, т.е., для квадратного уравнения $z^2 + a_1z + a_2 = 0$ его

корни находятся по формуле $z_{1,2} = \sqrt{a_2} e^{\pm i \arccos\left(\frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)}$.

При $n = 2$ для уравнения $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0$ его корни:

$$z_{1,2} = \sqrt[4]{a_4} e^{\pm i\varphi_1}, \quad z_{3,4} = \sqrt[4]{a_4} e^{\pm i\varphi_2},$$

где

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8\sqrt{a_4}}}{4\sqrt[4]{a_4}}\right); \quad \varphi_2 = \arccos\left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8\sqrt{a_4}}}{4\sqrt[4]{a_4}}\right).$$

Например, для уравнения $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ значения косинусов:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ; \quad \cos \varphi_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 144^\circ,$$

т.е., корни уравнения имеют вид

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}; \quad z_{3,4} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm i \cdot \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Покажем эффективность метода на примере уравнения ([3], с.106):

$$z^4 - 4(1 + \cos 0,1)z^3 + (8 + 16\cos 0,1)z^2 - 16(1 + \cos 0,1)z + 16 = 0.$$

В монографии [3] данное уравнение решается приближенно методом функций Никпорца. Соответствующий алгоритм является очень громоздким.

С другой стороны, легко заметить, что равенства (2) выполнены:

$$a_3 = -16(1 + \cos 0,1) = 4[-4(1 + \cos 0,1)] = 4a_1; \quad a_4 = 16 = 1 \cdot 4^2.$$

Это означает, что $r = 2$, т.е., все корни расположены на окружности $|z| = 2$,

и
$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{1 + \cos 0,1 \pm (1 - \cos 0,1)}{2}.$$

Таким образом, $\cos \varphi_1 = 1$, т.е., $\varphi_1 = 0$; $\cos \varphi_2 = \cos 0,1$, т.е., $\varphi_2 = 0,1$. Тогда

$$z_1 = z_2 = 2, \quad z_3 = 2e^{i \cdot 0,1}, \quad z_4 = 2e^{-i \cdot 0,1}.$$

В работе [2] приведены многочисленные примеры эффективного использования данного алгоритма для решения возвратных алгебраических уравнений 6-й, 8-й и 10-й степени.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе исследовано применение алгоритма Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения произвольной степени для класса возвратных алгебраических уравнений, для которых вопрос выбора вектора начального приближения решен полностью. Выяснена геометрическая природа свойства возвратности, получены удобные аналитические формулы для корней уравнений четвертой и шестой степени, содержащие не только радикалы; проведено сравнение с методом функций Никпорца. Доказаны необходимые и достаточные условия расположения всех корней такого класса уравнений на окружности комплексной плоскости.

Список литературы

1. Трубников, Ю.В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, И.А. Орехова. – Витебск: УО «ВГУ имени П.М. Машерова», 2011. – 95 с.
2. Трубников, Ю.В. Особенности применения алгоритма Вейерштрасса для возвратных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2013. – № 1 (67). – С. 5-9.
3. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ -алгоритма. - Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.

АППРОКСИМАЦИЯ СИНУСА С УЧЕТОМ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ю. В. Трубников¹, О. В. Пышненко¹, Н.Е. Трубникова²

¹Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова,

²Витебск, ВГТУ

Известно [1–3], что приближения функций в равномерной метрике являются наиболее существенными для приложений. В особенности, если приближающая функция сохраняет некоторые свойства приближаемой функции. В рассматриваемом в докладе случае в качестве полинома наилучшего приближения для функции $f(x) = \sin x$ ($x \in [0, 1]$) берется полином вида $P(x) = x + ax^3 + bx^5$, что позволяет сохранить свойство нечетности синуса и тот факт, что