

$$+ \frac{(f_1^3 f_5 - 15 f_1^2 f_2 f_4 + 105 f_1 f_2^2 f_3 - 10 f_1^2 f_3^2 - 105 f_2^4) f^5}{120 f_1^9}. \quad (5)$$

Решая для уравнения (5) задачу Коши, мы получаем в случае продолжимости решения $x(t)$ на полуось $[0, \infty)$ значение корня уравнения $f(x) = 0$ с требуемой точностью.

Покажем на примере эффективность итерационного процесса

$$x_{k+1} = \varphi_5(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пусть $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 3$, тогда при $x_0 = 3$ получаем

$$x_1 = 1,76119; \quad x_2 = 1,11262; \quad x_3 = 1,00008.$$

Заключение. Для увеличения скорости сходимости итерационного процесса авторы доклада предлагают применять итерационный процесс, определяемый итерационной функцией (2). Основной трудностью применения такого процесса при больших значениях n является нахождение множителей $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Для их нахождения авторы предлагают использовать формулу Бруно.

Список литературы

1. Березин, И.С. Методы вычислений. Т. II / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
2. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.] / – М.: Наука, 1969. / 456 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ВЕЙЕРШТРАССА

Ю.В. Трубников¹, О.В. Пышненко¹, В.В. Силивончик²
¹Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова,
²Витебск, ВГТУ

Итерационный алгоритм Вейерштрасса [1] предназначен для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения

$$P_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (1)$$

с комплексной переменной z и постоянными комплексными коэффициентами a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) в случае отсутствия кратных корней. Численные эксперименты показывают нелокальный характер сходимости, т.е., векторная последовательность $z_j(k)$ ($1 \leq j \leq n$, $k = 1, 2, \dots$) сходится к некоторой перестановке корней уравнения (1) при «почти любых» начальных значениях. Однако доказательство факта такой нелокальной сходимости уже для кубического уравнения весьма затруднительно. Авторы предлагают использовать дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса, т.е., систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{P_n[z_j(t)]}{\omega'[z_j(t)]}.$$

Материал и методы. Объектами исследования являются: алгебраические уравнения, итерационные процессы Вейерштрасса, Ньютона-Канторовича и их дифференциальные аналоги. В работе используются топологические и аналитические методы исследования. Вычисления проводились при помощи пакета символьной математики *Maple 15*.

Результаты и их обсуждение. Пусть дискриминант уравнения (1) не равен нулю. Тогда уравнение (1) имеет n различных корней. Произвольный набор комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ порождает алгебраическое уравнение:

$$z^n + u_1 z^{n-1} + \dots + u_{n-1} z + u_n = 0 \quad (2)$$

с коэффициентами $u_1, u_2, \dots, u_n$, в котором корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ и коэффициенты $u_1, u_2, \dots, u_n$ связаны равенствами Виета. Обозначим: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$; дискриминант уравнения (2):

$$DIS(U) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 = f(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (3)$$

где $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ является алгебраическим многочленом переменных $u_1, u_2, \dots, u_n$. Рассматривая $z_1, z_2, \dots, z_n$ как независимые переменные, введем отображение $U = F(Z)$, определяемое равенствами Виета. Пусть $F'(Z)$ – производная отображения U . Рассмотрим естественный дифференциальный аналог метода Ньютона – Канторовича

$$\dot{Z}(t) = -\{F'[Z(t)]\}^{-1} \{F[Z(t)] - A\}. \quad (4)$$

Тогда функция $U(t) = F[Z(t)]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{U} = -F'(Z) + A = -U + A. \quad (5)$$

Таким образом, если $Z(t)$ является решением уравнения (4), то соответствующий набор коэффициентов является решением уравнения (5).

В работе изучена структура множества тех начальных значений Z_0 , при которых имеет место равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t; Z_0) = IZ_A$, где Z_A – некоторый фиксированный набор корней уравнения (1), IZ_A – произвольная перестановка компонент этого набора.

Пусть $Z_0 = (z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0})$, $U_0 = (u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0})$ – начальные условия, а $Z(t; Z_0)$ и $U(t; U_0)$ – соответствующие решения уравнений (4) и (5). Множества начальных условий обозначим через C_Z^n и C_U^n , а символами Σ_Z и Σ_U – множества в пространствах C_Z^n и C_U^n , определяемые условиями: Σ_Z – множество тех начальных значений Z_0 , для которых существует хотя бы одно значение $t \in [0, \infty)$, при котором $DIS(Z(t; Z_0)) = 0$; Σ_U – множество тех начальных значений U_0 , для которых существует хотя бы одно значение $t \in [0, \infty)$, при котором

$DIS(U(t; U_0)) = 0$. Определим множества M_Z и M_U следующим образом:
 $M_Z = C_Z^n \setminus \Sigma_Z$, $M_U = C_U^n \setminus \Sigma_U$. Пусть K_{IZ_A} – подмножество пространства C_Z^n ,
 для которого все траектории $Z(t; Z_0)$ стремятся к IZ_A , т.е., $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t; Z_0) = IZ_A$.

В работе доказаны:

Теорема 1. Множество K_{IZ_A} является открытым и связным. Кроме того $M_Z = \bigcup_I K_{IZ_A}$, при этом отображение $F: K_{IZ_A} \rightarrow M_U$ является диффеоморфизмом. Каждое из положений равновесия системы дифференциальных уравнений (4) является устойчивым по Ляпунову.

Лемма 1. Пусть $Z(t)$ – произвольное решение уравнения (4) и I – некоторая перестановка его координат. Тогда $IZ(t)$ – также решение уравнения (4).

Следствие. Справедливо равенство $IZ(t; Z_0) = Z(t; IZ_0)$.

Лемма 2. Если $Z_0 \in M_Z$, то решение $Z(t; Z_0)$ определено при $t \in [0, \infty)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t; Z_0) = IZ_A$ для некоторой перестановки I .

Лемма 3. Множество M_U является открытым и связным. Множество M_Z является открытым.

Лемма 4. Пусть $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow C_Z^n$ – непрерывное отображение и линия $Z_0 = \varphi(\tau)$ ($\tau \in (\alpha, \beta)$) не пересекает поверхность Σ_Z . Тогда любое начальное условие порождает решение $Z(t; \varphi(\tau))$, которое продолжается до $+\infty$ по переменной t и функция $Z(t; \varphi(\tau))$ непрерывна на всей полосе $t \in [0, \infty)$, $\tau \in (\alpha, \beta)$. Кроме того, для любого $\tau' \in (\alpha, \beta)$ существует окрестность $(\tau' - \varepsilon, \tau' + \varepsilon)$ такая, что для любого τ из этой окрестности: $\tau \in (\tau' - \varepsilon, \tau' + \varepsilon)$ траектория $Z(t; \varphi(\tau))$ стремится к одной из перестановок корней. Т.е., $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t; \varphi(\tau)) = IZ_A$ для некоторой фиксированной перестановки I .

Полученный в теореме 1 результат можно существенно обобщить. Пусть $\frac{dz}{dt} = -[F'(z)]^{-1} \cdot F(z)$, где F – дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, действующий из некоторого множества M банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 .

Теорема 2. Пусть $F(z_*) = 0$ и линейный оператор $F'(z_*)$ имеет ограниченный обратный, кроме того $\lim_{\|z - z_*\| \rightarrow 0} \|F'(z) - F'(z_*)\| = 0$, тогда производная Фреше отображения $-[F'(z)]^{-1} \cdot F(z)$ в точке $z = z_*$ равна $-E$, где E – единичный оператор.

Теорема 2 влечет асимптотическую устойчивость по Ляпунову состояния равновесия z_* операторного дифференциального уравнения.

Заключение. Таким образом, в статье построены дифференциальные аналоги итерационных процессов Вейерштрасса и Ньютона-Канторовича одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения. Доказано, что подмножество пространства начальных условий, для которого все траектории стремятся к одной из перестановок корней, является открытым и связным, при этом отображение данного подмножества на множество значений коэффициентов уравнения является диффеоморфизмом. Доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояний равновесия; исследованы вопросы продолжимости решений. Проведенные численные вычисления показывают высокую эффективность такого процесса: задача Коши, решаемая для соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеет траекторию, быстро приближающуюся к вектору корней алгебраического уравнения при «почти любых» начальных условиях.

Список литературы

1. Трубников, Ю.В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, И.А. Орехова. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2011. – 95 с.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ ВОЗВРАТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, Сунь Байюй
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Алгоритм Вейерштрасса [1] является эффективным алгоритмом одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения произвольной степени. В настоящей работе исследован класс алгебраических уравнений, для которых вопрос выбора вектора начального приближения решается полностью – это класс возвратных алгебраических уравнений [2].

Материал и методы. Объектами исследования являются: итерационный процесс Вейерштрасса, возвратные алгебраические уравнения. В качестве метода исследования применяется теория определителей, свойства неявных функций и некоторые общие теоремы функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим алгебраическое уравнение:

$$P_{2n}(z) \equiv z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} z + a_{2n} = 0, \quad (a_0 = 1) \quad (1)$$

с действительными коэффициентами: a_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$), удовлетворяющими равенствам:

$$a_{n+k} = a_{n-k} r^{2k} \quad (r > 0, \quad 1 \leq k \leq n). \quad (2)$$

Лемма 1. Подстановка

$$y = z + \frac{r^2}{z} \quad (3)$$

приводит уравнение (1) к виду:

$$\Delta_n + a_1 \Delta_{n-1} + a_2 \Delta_{n-2} + \dots + a_{n-1} \Delta_1 + a_n \Delta_0 = 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = z + \frac{r^2}{z}, \quad \Delta_2 = z^2 + \frac{r^4}{z^2}, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} = z^{n-1} + \frac{r^{2(n-1)}}{z^{n-1}}, \quad \Delta_n = z^n + \frac{r^{2n}}{z^n},$$