Кроме того, топографические изображения поверхности образцов ТГС – ТГС:Cr позволяют непосредственно наблюдать границы доменов и их конфигурацию (рис. 3).

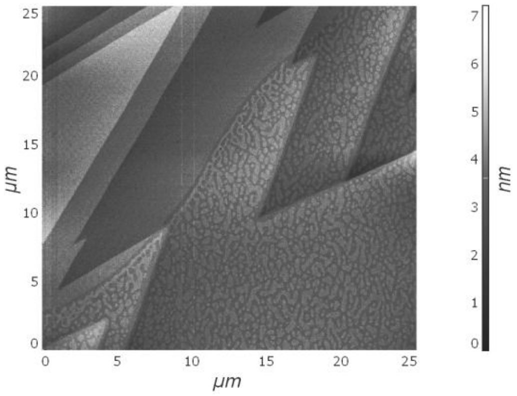

Рис. 3. 25x25 мкм топографическое изображение (010) поверхности кристалла ТГС - ТГС:Cr

Заключение. Таким образом, возможности методов АСМ позволят изучать состояние микро- и нанорельефа поверхности, конфигурацию доменов и структуру границ в неоднородных кристаллах ТГС - ТГС:Cr. Исследования по выявлению корреляции между доменной и примесной структурами в таких кристаллах позволят выяснить механизмы формирования периодической доменной структуры в неоднородных водородсодержащих сегнетоэлектриках.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, И.А. Орехова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Одним из направлений развития оптимальных итерационных процессов решения уравнения

$$f\left(x\right)=0 \quad \left(f:C\to C\right), \tag{1}$$

где $C-$ множество комплексных чисел, является применение итерационных процессов высоких порядков. Для этого ([1], с. 141) требуется находить в явном виде слагаемые функции

$$\varphi_r\left(x\right)\equiv x + \sum_{k=1}^{r}\left(-1\right)^k\frac{a_k\left(x\right)}{k!}\left[f\left(x\right)\right]^k, \tag{2}$$

где $a_k\left(x\right) \equiv F^{(k)}\left[f\left(x\right)\right]-$ производные функции F и $x\equiv F\left[f\left(x\right)\right]$.

В докладе сравниваются разные методы нахождения производных $a_k\left(x\right)$ и, кроме того, предлагается дифференциальный аналог итерационного процесса $x_{n+1}=\varphi_r\left(x_n\right) \quad \left(n=1,2,...\right)$.

Материал и методы. Одним из известных методов является метод последовательного дифференцирования тождества $x\equiv F\left[f\left(x\right)\right]$. Этот метод позволяет находить вид итерационных функций (2) для относительно небольших значений r, например, при $r=5$ получаем следующее равенство:

$$\varphi_5(x)=x-\frac{f}{f_1}-\frac{f_2 f^2}{2f_1^3}+\frac{\left(f_1 f_3-3f_2^2\right)f^3}{6f_1^5}-\frac{\left(f_1^2 f_4-10f_1 f_2 f_3+15f_2^3\right)f^4}{24f_1^7}+$$

$$+\frac{\left(f_1^3 f_5-15f_1^2 f_2 f_4+105f_1 f_2^2 f_3-10f_1^2 f_3^2-105f_2^4\right)f^5}{120f_1^9},$$

где $f_k=f^{(k)}(x)$.

В докладе для нахождения производных обратной по отношению к $f(x)$ функции $F\left[f(x)\right]$ предлагается использовать формулу Бруно ([2], с. 52) и её операторный аналог ([3], с. 309).

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим сложную функцию $y(x)=F\left[f(x)\right]$. Формула Бруно выражает производные $y^{(n)}(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ в терминах производных $F^{(k)}\left[f(x)\right]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и производных $f^{(j)}(x)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ и имеет следующий вид:

$$y_x^{(n)}=n!\sum_{k=1}^{n}F_{f(x)}^{(k)}\left[\sum\frac{1}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot\left(\frac{f^{(1)}}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{f^{(2)}}{2!}\right)^{k_2}\ldots\left(\frac{f^{(n)}}{n!}\right)^{k_n}\right], \quad (3)$$

где $k_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ – такие неотрицательные числа, для которых $k_1+k_2+\ldots+k_n=k$, а суммирование во внутренней сумме производится по всем решениям уравнения

$$k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n. \quad (4)$$

В случае, если функция F является обратной для функции f, система уравнений (3) является линейной относительно $F_{f(x)}^{(k)}$ и её решение позволяет выразить производные $F_{f(x)}^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ через производные функции f. Приведем, например, вид матрицы системы (3) для $n=1,2,\ldots,5$:

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & f_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & 3f_1 f_2 & f_1^3 & 0 & 0 \\ f_4 & 4f_1 f_3+3f_2^2 & 6f_1^2 f_2 & f_1^4 & 0 \\ f_5 & 5f_1 f_4+10f_2 f_3 & 10f_1^2 f_3+15f_1 f_2^2 & 10f_1^3 f_2 & f_1^5 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, авторы доклада предлагают дифференциальный аналог итерационного процесса, основанного на итерационной функции $\varphi_5(x)$. Такой аналог представляет собой дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{f}{f_1}-\frac{f_2 f^2}{2f_1^3}+\frac{\left(f_1 f_3-3f_2^2\right)f^3}{6f_1^5}-\frac{\left(f_1^2 f_4-10f_1 f_2 f_3+15f_2^3\right)f^4}{24f_1^7}+$$

$$+\frac{\left(f_1^3 f_5-15 f_1^2 f_2 f_4+105 f_1 f_2^2 f_3-10 f_1^2 f_3^2-105 f_2^4\right) f^5}{120 f_1^9}. \quad (5)$$

Решая для уравнения (5) задачу Коши, мы получаем в случае продолжимости решения $x(t)$ на полуось $[0, \infty)$ значение корня уравнения $f(x)=0$ с требуемой точностью.

Покажем на примере эффективность итерационного процесса

$$x_{k+1} = \varphi_5(x_k) \quad (k=1, 2,...).$$

Пусть $f(x)=x^5+x^4+x^3-3$, тогда при $x_0=3$ получаем

$$x_1=1,76119; \quad x_2=1,11262; \quad x_3=1,00008.$$

Заключение. Для увеличения скорости сходимости итерационного процесса авторы доклада предлагают применять итерационный процесс, определяемый итерационной функцией (2). Основной трудностью применения такого процесса при больших значениях n является нахождение множителей $a_k(x)$ $(k=1,2,...,n)$. Для их нахождения авторы предлагают использовать формулу Бруно.

Список литературы

1. Березин, И.С. Методы вычислений. Т.II / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
2. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]/ – М.: Наука, 1969. / 456 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ВЕЙЕРШТРАССА

Ю.В. Трубников[1], О.В. Пышненко[1], В.В. Силивончик[2]
[1]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова,
[2]Витебск, ВГТУ

Итерационный алгоритм Вейерштрасса [1] предназначен для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения

$$P_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (1)$$

с комплексной переменной z и постоянными комплексными коэффициентами a_j $(j=1,2,\ldots,n)$ в случае отсутствия кратных корней. Численные эксперименты показывают нелокальный характер сходимости, т.е., векторная последовательность $z_j(k)$ $(1 \le j \le n, \ k=1,2,..)$ сходится к некоторой перестановке корней уравнения (1) при «почти любых» начальных значениях. Однако доказательство факта такой нелокальной сходимости уже для кубического уравнения весьма затруднительно. Авторы предлагают использовать дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса, т.е., систему дифференциальных уравнений