Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

М.Н. Подоксёнов
В.И. Луцейкович

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации

Репозиторий ВГУ

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2017

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.34я13
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 28.12.2016 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** старший преподаватель кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ» **В.И. Луцейкович**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ», доктор технических наук *А.А. Джежора*

Подоксёнов, М.Н.

П44 Начертательная геометрия : методические рекомендации / М.Н. Подоксёнов, В.И. Луцейкович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 52 с.

Данные методические рекомендации подготовлены в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» для студентов 2 курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий». Излагается теоретический материал и приведены примеры решения задач.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.34я73

© Подоксёнов М.Н., Луцейкович В.И., 2017
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2017

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для студентов 2 курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий».

Методические рекомендации включают в себя теоретический материал, вопросы и упражнения для самоконтроля и задания для самостоятельного решения. Задания делятся на три уровня сложности согласно первой цифре в номере задания. В контрольную работу как на дневном, так и на заочном отделении будут включены задания, подобные приведённым в данном издании. Для получения минимальной удовлетворительной оценки студент должен уметь решать задания первого и второго уровней сложности.

Основным видом работы по освоению материала курса является самостоятельная работа студента. Изучение начертательной геометрии и перспективы следует начинать с проработки теоретического учебного материала и только после этого приступать к выполнению практических заданий.

Задания следует выполнять карандашами с помощью чертёжных инструментов – треугольников, циркулей, лекал. Все вспомогательные построения, в том числе и линии связи, выполняются тонкими линиями. В качестве линий видимого контура используются сплошные основные линии, невидимый контур изображается штриховыми линиями. Толщина тонких, штриховых и штрихпунктирных линий должна быть в 2…3 раза тоньше основных линий.

Более подробные требования по оформлению контрольной работы можно найти в системе дистанционного обучения Витебский государственный университет *sdo.vsu.by*. Решение задач по теме «Аксонометрия» предполагает самостоятельное изучение способов построения эллипса. Данная информация также размещена на сайте *sdo.vsu.by*.

На зачёте студенту может быть задан любой из вопросов из списка вопросов, предназначенных для самоконтроля.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 1. ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

§ 1. *Параллельное проецирование*

Определение. Выберем в пространстве некоторую плоскость σ и вектор $\vec{\mathbf{p}}$ не параллельный σ. Пусть A – произвольная точка в пространстве. Проведём через A прямую, параллельную $\vec{\mathbf{p}}$. Эта прямая пересечёт плоскость σ в точке A_o, которая называется *параллельной проекцией точки* A *на плоскость* σ *по направлению вектора* $\vec{\mathbf{p}}$.

Совокупность проекций всех точек фигуры Φ составляют фигуру Φ_o, которая называется проекцией фигуры Φ. Если вектор $\vec{\mathbf{p}} \perp \sigma$, то проекция называется ортогональной.

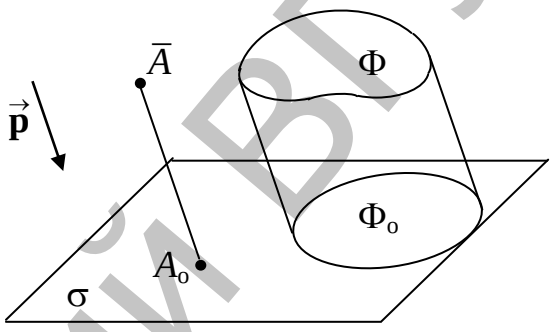


*рис.*1.1

В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые прямые и отрезки не параллельны вектору $\vec{\mathbf{p}}$.

Свойства параллельного проецирования.

1. Проекция прямой есть прямая.

2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3. Проекция отрезка AB есть отрезок A_oB_o, где A_o – проекция точки A, B_o – проекция точки B.

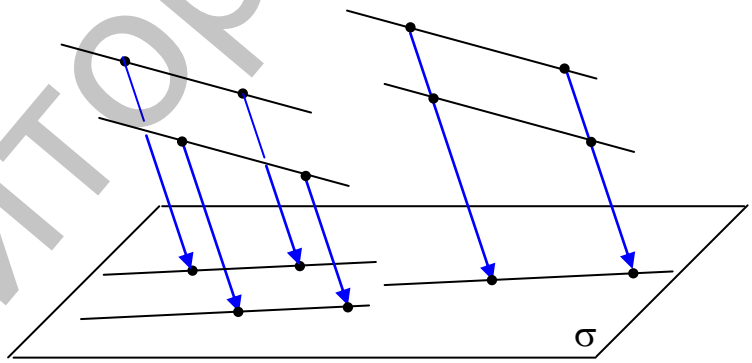


*рис.*1.2

4. Если отрезок перпендикулярен плоскости проекций, то он проецируется в точку.

5. При параллельном проецировании сохраняется простое отношение трёх точек. В частности, проекция середины отрезка AB есть середина отрезка A_oB_o.

6. Проекции параллельных отрезков, или отрезков, лежащих на одной прямой, параллельны или лежат на одной прямой.

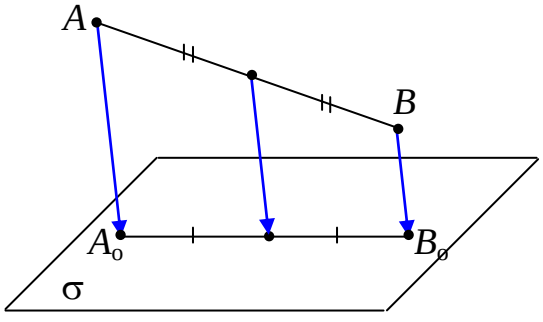


*рис.*1.3

Репозиторий ВГУ

7. Проекции параллельных отрезков, или отрезков, лежащих на одной прямой (рис. 1.4) пропорциональны этим отрезкам:

$$\frac{A_oB_o}{C_oD_o} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}. \qquad (1)$$

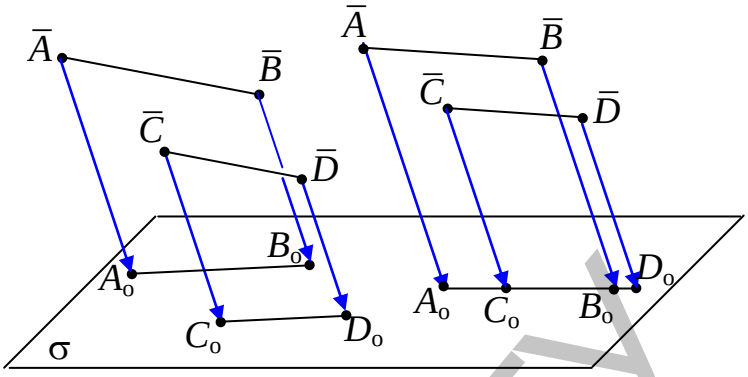


*рис.*1.4

Упражнение. Доказательство этих утверждений не выходит за рамки школьного курса математики. Докажите их самостоятельно.

Пропорцию (1) можно ещё переписать так:

$$\frac{A_oB_o}{AB} = \frac{C_oD_o}{CD} = k = \text{const}. \qquad (2)$$

Это значит, что отношение длин проекций к длинам самих отрезков есть величина постоянная (если отрезки лежат на параллельных прямых или одной прямой), и она называется коэффициентом искажения. Легко доказать, что $k = \cos\alpha$, где α – угол наклона прямой к плоскости проекций. В частности верно следующее свойство.

8. Если отрезок параллелен плоскости проекций, то он проецируется в натуральную величину.

Хотя, согласно определению, проецирующий вектор $\vec{\mathbf{p}}$ может быть расположен к плоскости проекций под любым углом, чаще всего применяется ортогональная проекция.

§ 2. *Центральное проецирование*

Пусть задана плоскость проекций α и точка $S \notin \alpha$ – центр проецирования. *Центральной проекцией* произвольной точки M называется точка $M' = SM \cap \alpha$. При этом прямая называется проецирующей прямой. Проекцией фигуры F называется фигура F', состоящая из проекций всех точек фигуры F.

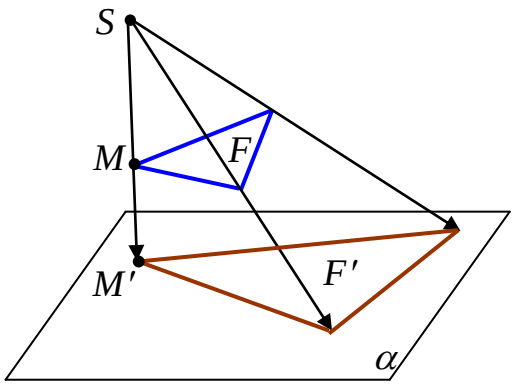


*рис.*1.5

Для построения проекции какой-либо фигуры не обязательно строить проекции всех её точек. Так, для построения проекции прямой достаточно построить проекции двух её точек, для построения проекции многоугольника достаточно построить проекции его вершин.

Репозиторий ВГУ

Именно центральная проекция используется в художественной графике, поскольку изображение, которое возникает на сетчатке глаза, является центральной проекцией оригинала. Здесь важна наглядность изображения на рисунке, и центральная проекция даёт возможность оценить, какие из изображённых объектов расположены ближе, а какие дальше.

Центральное проецирование неудобно в технической графике, где главным требованием является возможность получить по изображению точное представление о форме и размерах предмета. Например, центральные проекции параллельных прямых могут оказаться пересекающимися прямыми, а проекции некоторых точек могут вовсе отсутствовать.

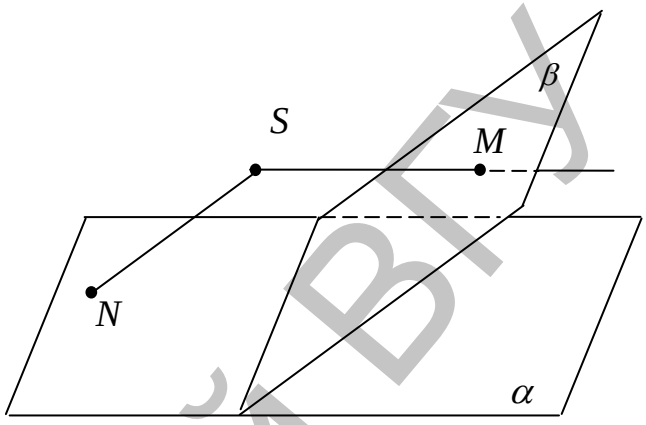


*рис.*1.6

Если прямая SM параллельна плоскости проекций, то точка M не имеет проекции (рис. 1.6).

Центральное проецирование искажает пропорциональность отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых. Например, на рисунке 1.7 отрезки AB, BC и CD все различны, а их проекции равны.

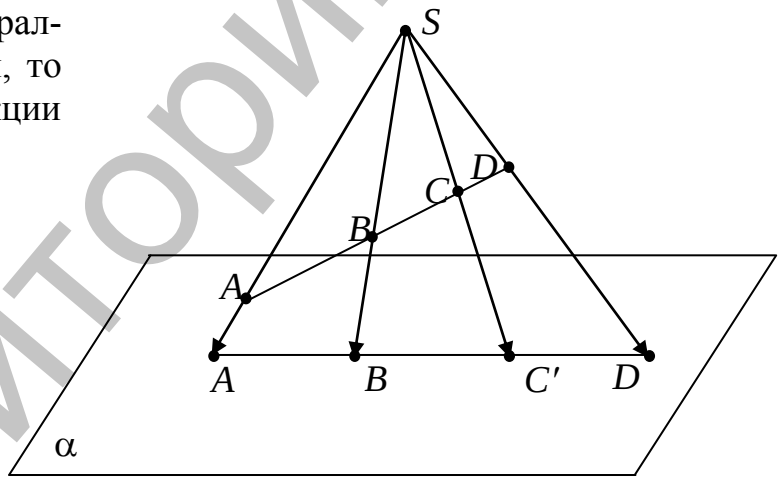


*рис.*1.7

§ 3. *Обратимость чертежа. Точка в системе нескольких плоскостей проекций*

Определение. Обратимость чертежа – это возможность однозначно определить положение точки в пространстве по ее проекциям.

Например, на рисунке 8 проекциями двух различных точек A и B является одна точка $A_o = B_o$. Тем самым, одна проекция точки не определяет положение этой точки в пространстве.

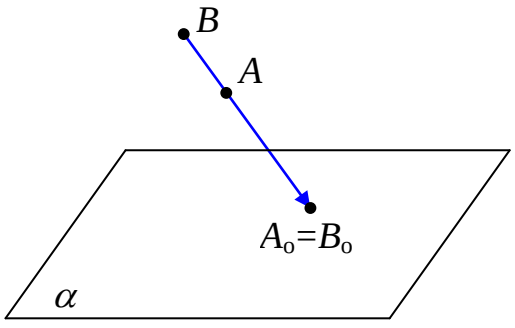


*рис.*1.8

Репозиторий ВГУ

Для получения обратимого, чертежа, фигуру необходимо спроецировать на две несколько плоскостей. Удобно осуществлять проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости в пространстве, которые можно считать координатными плоскостями (рис. 1.9).

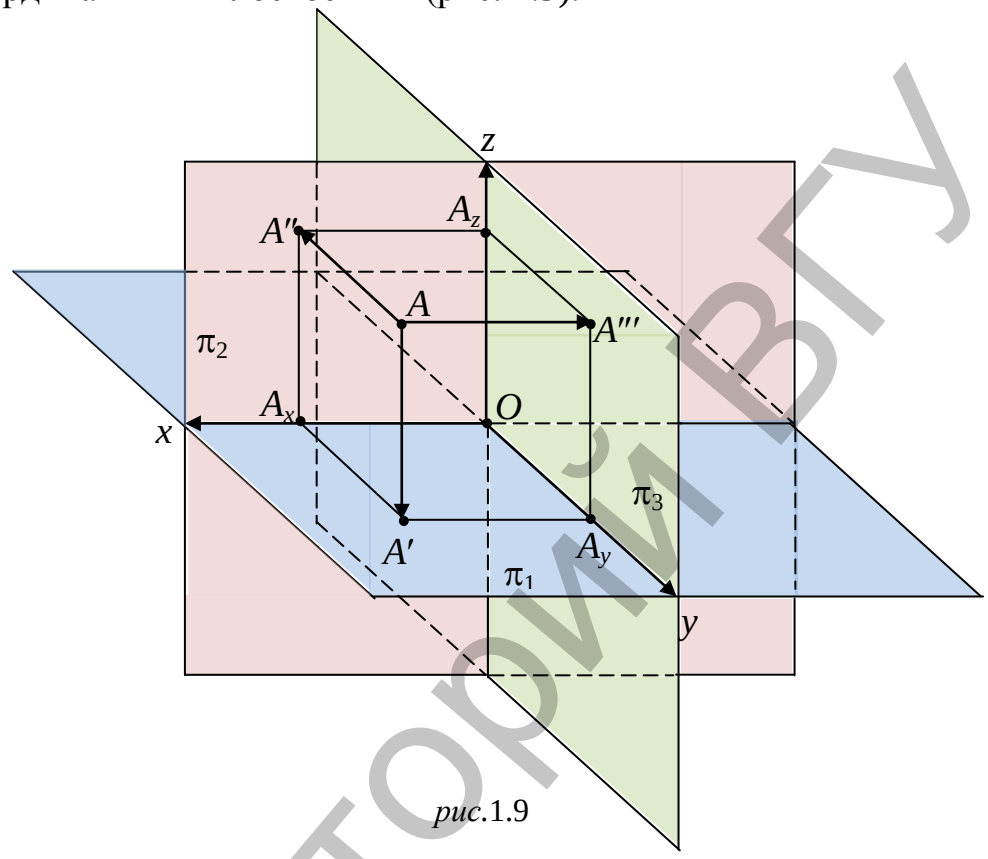


*рис.*1.9

Три плоскости разбивают пространство на 8 октантов. Их нумерация не так важна; важно, что проецируемый объект, как правило, размещают в первом октанте, в котором расположена точка A. Плоскость π_1 называется горизонтальной, π_2 – фронтальной, π_3 – профильной. Соответственно этим названиям называются проекции точки A: A'– горизонтальная проекция, A''– фронтальная проекция, A'''– профильная проекция.

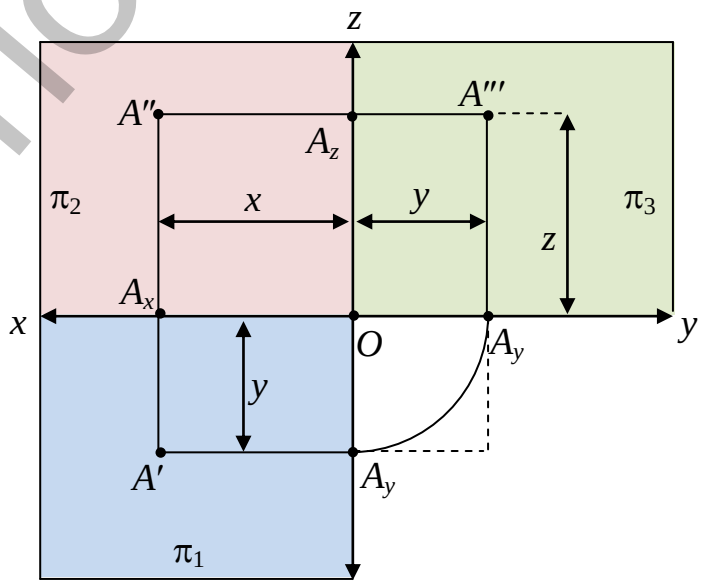


*рис.*1.10

Репозиторий ВГУ

Для того чтобы получить плоское изображение повернём плоскость π_1 вокруг оси Ox вниз, а плоскость π_3 – вокруг оси Oz вправо до совмещения с плоскостью π_2 (рис. 1.10). При этом ось Oy изображается дважды. Линия $A'A''$ называется вертикальной линией связи, $A''A'''$ – горизонтальной линией связи, $A'A'''$ – ломаной линией связи.

Имея только две из трёх проекций точки A можно восстановить недостающую третью проекцию с помощью линий связи. Поэтому достаточно иметь изображения только горизонтальной и вертикальной проекционных плоскостей и проекций точки на эти плоскости, с тем, чтобы можно было однозначно определить положение точки в пространстве (рис. 1.11).

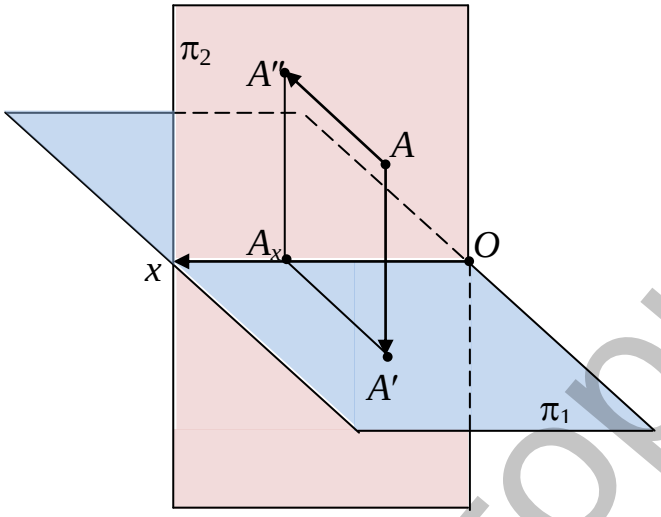


*рис.*1.11а

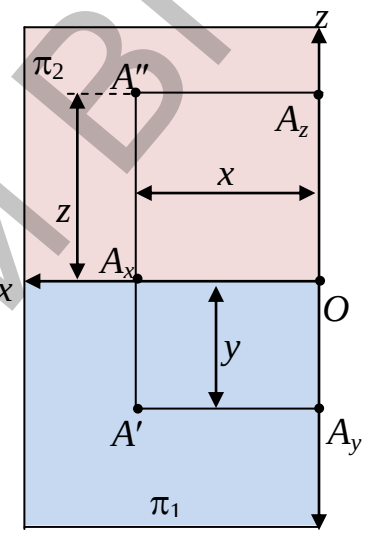


*рис.*1.11б

Если убрать обозначение плоскостей, то окончательно получаем изображение (рис. 1.12), которое называется «эпюр Монжа». Если точка A задана горизонтальной проекцией A' и фронтальной A'', мы будем её обозначать (A', A'').

При изображении сложных объектов иногда бывает недостаточно проекций только на две плоскости.

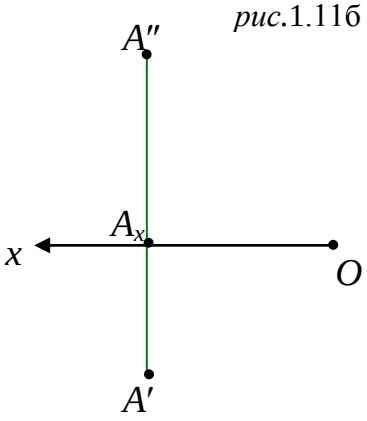


*рис.*1.12

§ 4. *Изображение прямой*

Прямая определяется двумя своими точками. Выберем на прямой две точки A, B и построим их проекции A_o, B_o на плоскость изображений α. Тогда прямая A_oB_o является проекцией прямой AB. Получить эту проекцию можно так. Проведём через прямую AB плоскость β перпендикулярно плоскости α (рис. 1.13).

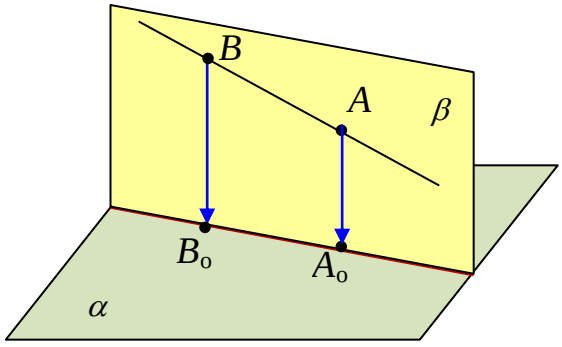


*рис.*1.13

Репозиторий ВГУ

Эта плоскость будет также проходить через проецирующие лучи AA_o и BB_o. Прямая, которая получается в пересечении плоскостей α и β является проекцией прямой AB.

Так же, как и в случае изображения точки, одна проекция не определяет положение прямой в пространстве. Нам нужно иметь, по крайней мере, две проекции. Если прямая a задана горизонтальной проекцией a' и фронтальной a'', мы будем её обозначать (a', a'').

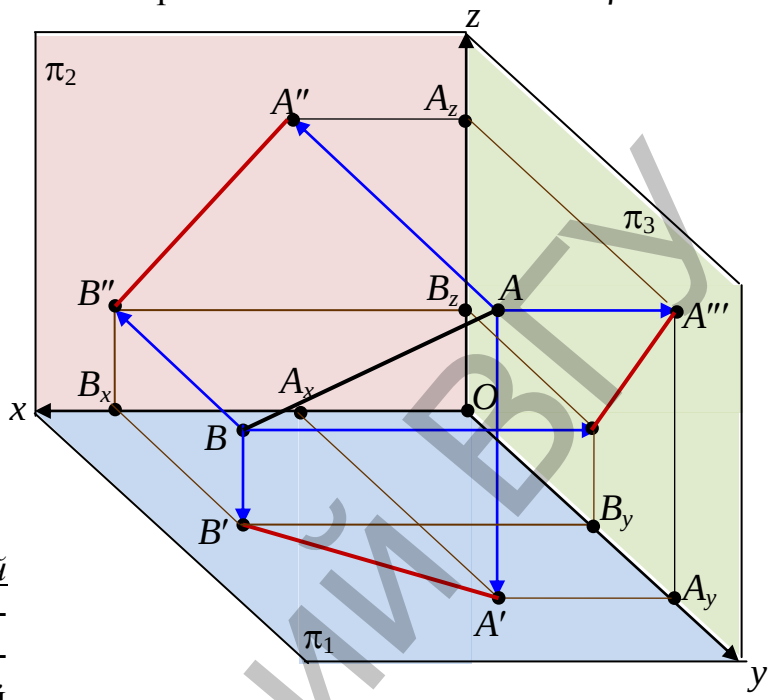


*рис.*1.14

Определение. *Прямой общего положения* называется прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций.

Точки A, B, которые определяют прямую общего положения находятся на различном расстоянии от всех плоскостей проекций (рис. 1.14). Результат проецирования изображён на рисунке 1.15.

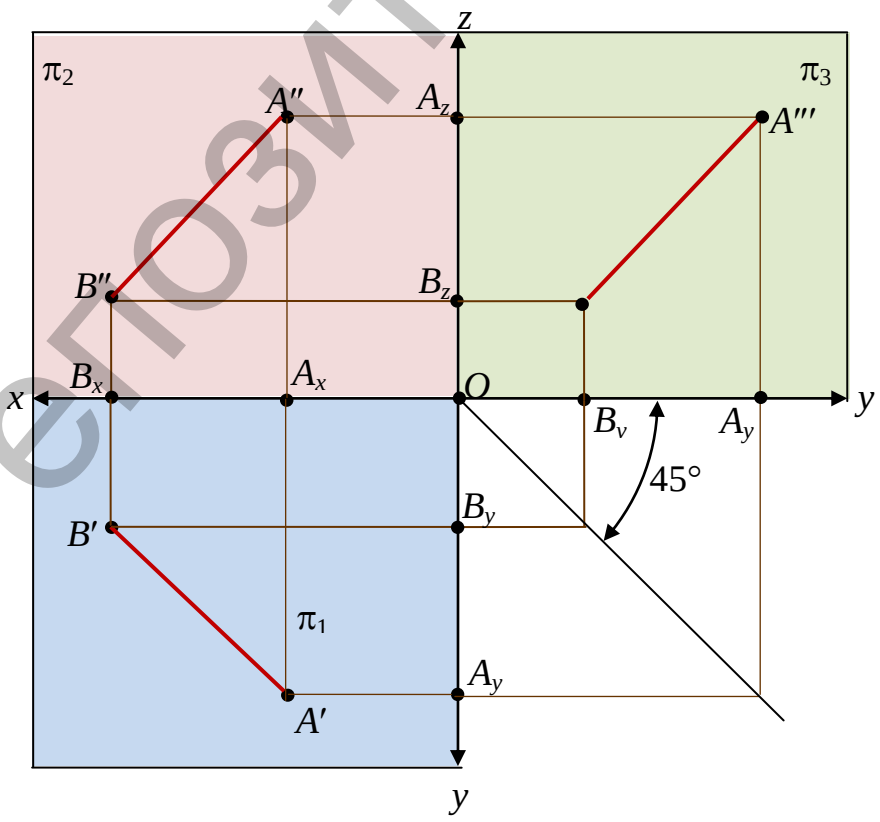


*рис.*1.15

Репозиторий ВГУ

Определение. *Прямыми частного положения* называются прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций.

Прямые частного положения подразделяются на

1) *прямые уровня*, которые параллельны одной из плоскостей проекций;
2) *проецирующие прямые*, которые перпендикулярны одной из плоскостей проекций.

В свою очередь прямые уровня подразделяются на

1а) *горизонтальные прямые*, которые параллельны горизонтальной плоскости;
1б) *фронтальные прямые*, которые параллельны фронтальной плоскости;
1в) *профильные прямые*, которые параллельны профильной плоскости.

На рисунках 1.16а, 1.16б, 1.17 подробно показана особенность изображения фронтальной прямой. Остальные случаи мы разберём на лабораторных занятиях.

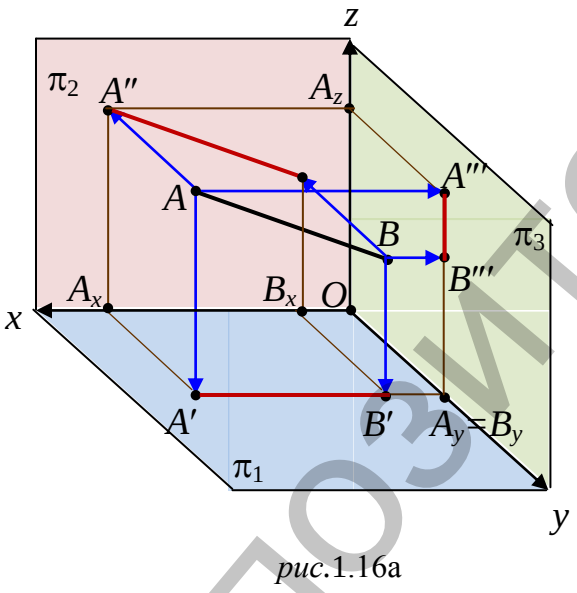


*рис.*1.16а

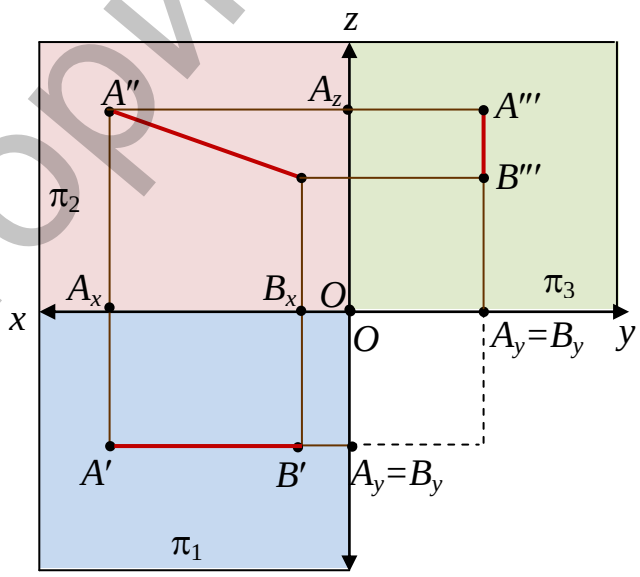


*рис.*1.16б

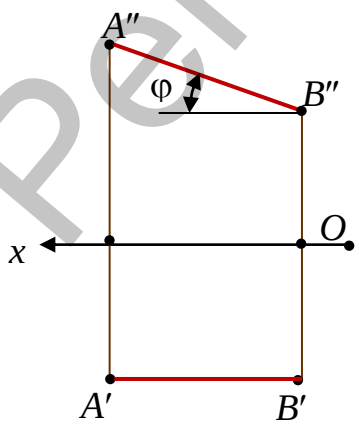


*рис.*1.17

На рисунке 1.17 φ – это натуральная величина угла между прямой и осью Ox или между прямой и плоскостью π_1; $A''B''$ – это натуральная величина изображаемого отрезка AB. На рисунках 1.18 и 1.19 изображены горизонтальная и профильная прямые. Соответственно $A'B'$ и $A'''B'''$ – натуральные величины отрезков.

Репозиторий ВГУ

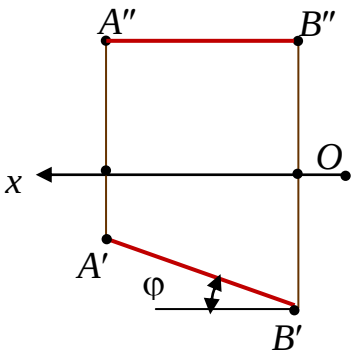


*рис.*1.18

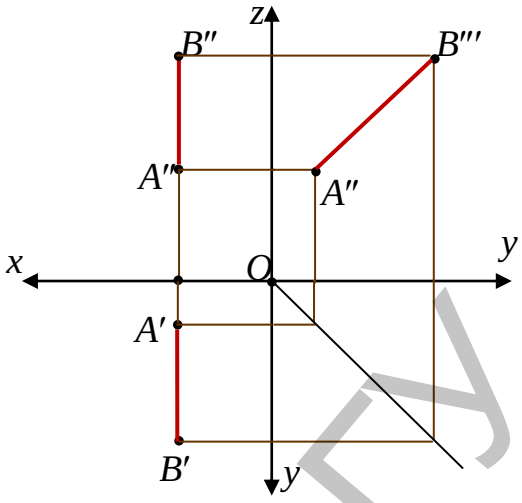


*рис.*1.19

Проецирующие прямые уровня подразделяются на

1а) *горизонтально-проецирующие*, которые перпендикулярны горизонтальной плоскости;

1б) *фронтально-проецирующие*, которые перпендикулярны фронтальной плоскости;

1в) *профильно-проецирующие*, которые перпендикулярны профильной плоскости.

Проекции этих прямых на соответствующие плоскости представляют собой точку.

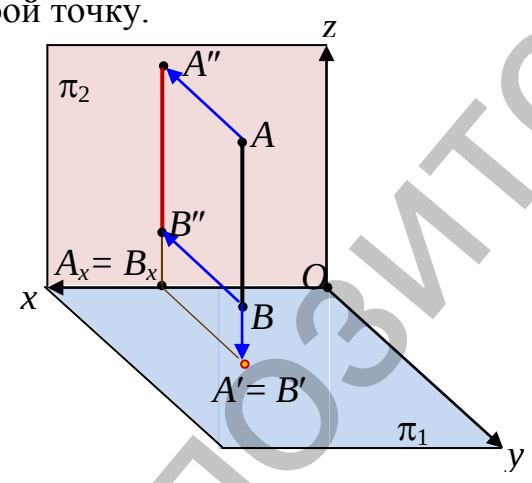


*рис.*20а

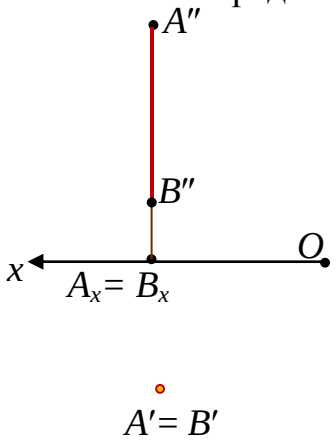


*рис.*20б

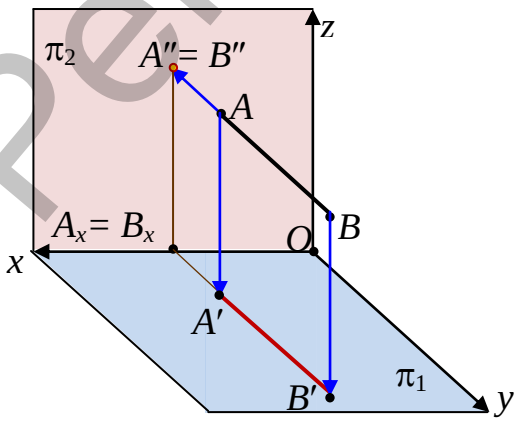


*рис.*21а

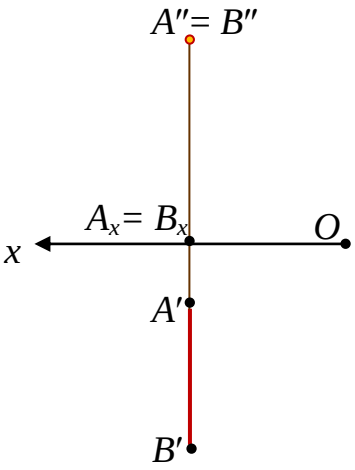


*рис.*21б

Репозиторий ВГУ

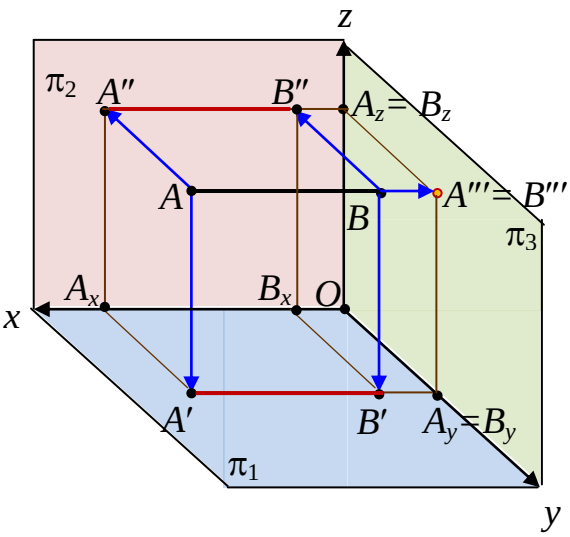


*рис.*22а

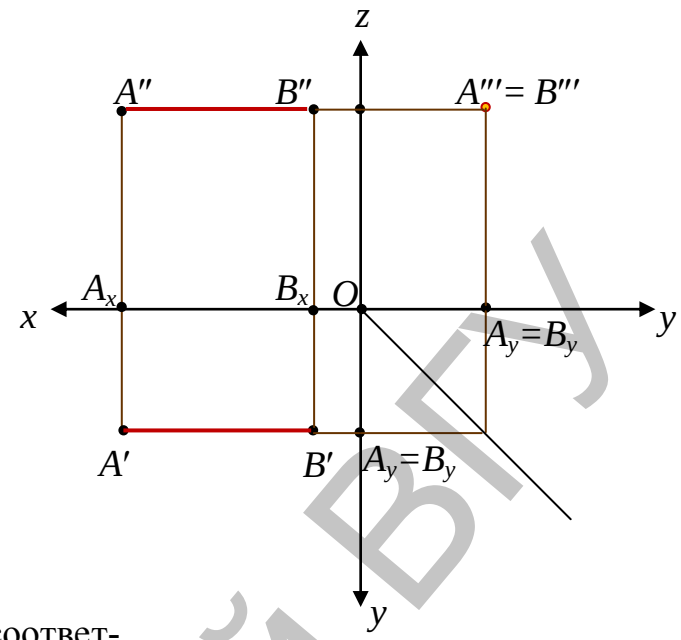


*рис.*22б

Проекции этих прямых на соответствующие плоскости представляют собой точку.

§ 5. *Следы прямой*

Определение. *Следами прямой* называются точки её пересечения с плоскостями проекций.

Прямая общего положения имеет три следа – горизонтальный, фронтальный и профильный. Прямые уровня имеют по два следа, а проецирующие прямые – по одному следу.

Для того чтобы найти след на пространственном изображении, мы продолжаем до пересечения саму прямую и её проекцию на соответствующую плоскость. На рисунке 1.23 K – это след прямой на плоскости π_1, а L – след на плоскости π_2.

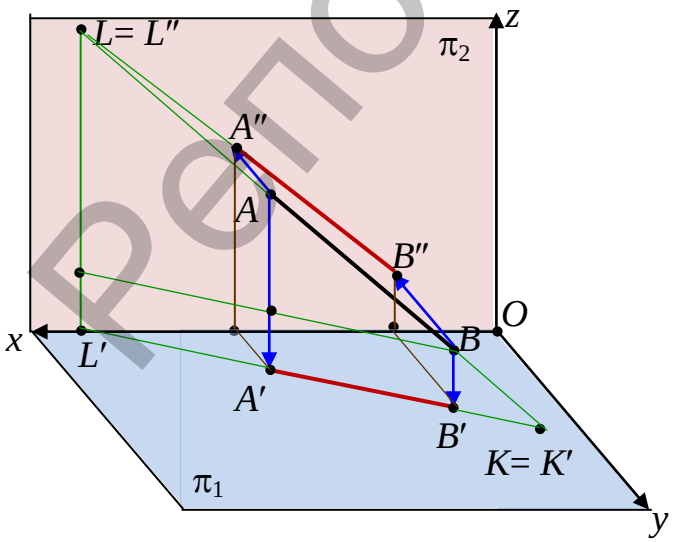


*рис.*1.23а

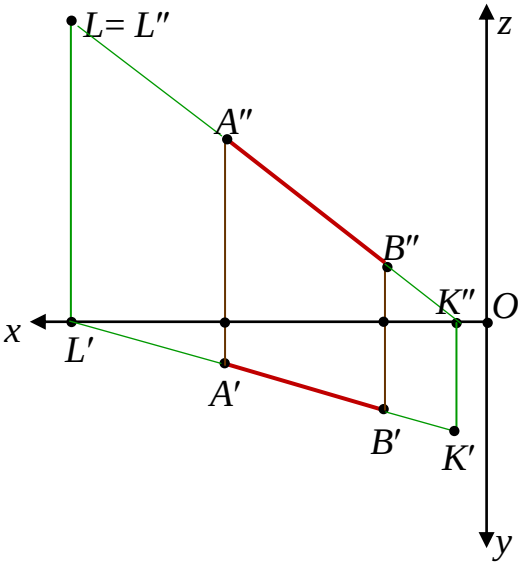


*рис.*1.23б

Репозиторий ВГУ

Для того чтобы на эпюре найти след прямой на плоскости π_1, мы продлеваем $A''B''$ до пересечения с Ox, находим точку K'', и из этой точки проводим прямую параллельно Oy до пересечения с $A'B'$.

§ 6. *Определение натуральной величины отрезка и углов наклона прямой*

Натуральная длина отрезка прямой частного положения совпадает с длиной одной из его проекций. Рассмотрим задачу, как по чертежу на эпюре можно определить натуральную длину отрезка прямой частного положения.

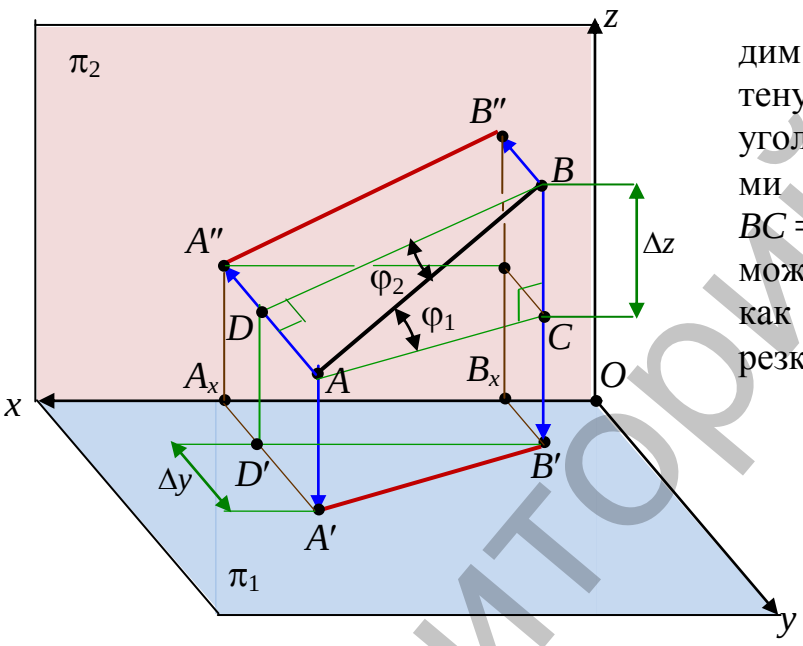


*рис.*1.24

На рисунке 1.24 мы видим, что AB является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами равными $A'B'$ и BC, при этом $BC = |z_B - z_A|$. По чертежу мы можем найти эту величину, как модуль разности длин отрезков $B''B_x$ и $A''A_x$.

Также AB является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами равными $A''B''$ и DA, а длину DA можно найти как модуль разности длин отрезков $B'B_x$ и $A'A_x$. На рисунке 1.25 показан способ построения отрезка $B'E$, равного отрезку AB.

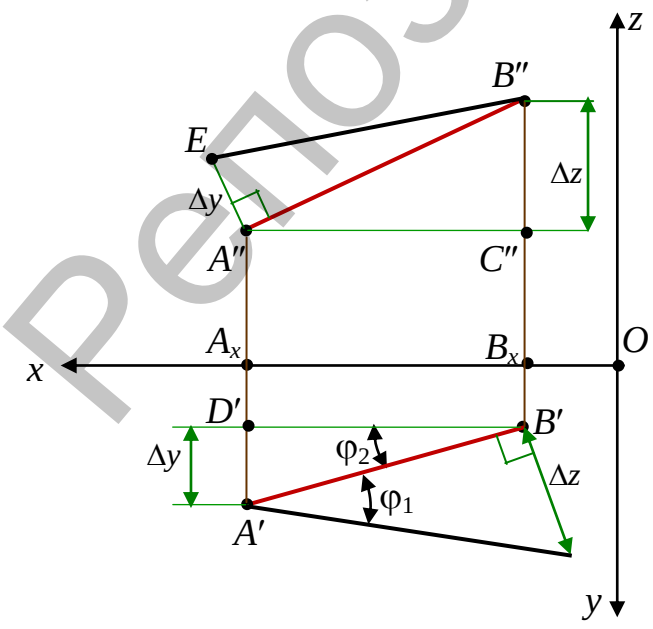


*рис.*1.25

Угол φ_1 – это угол между прямой и горизонтальной плоскостью проекций, φ_2 – это угол между прямой и фронтальной плоскостью проекций. Способ построения этих углов показан на рисунке 1.25.

Репозиторий ВГУ

§ 7. *Относительное расположение двух прямых в пространстве*

Две прямые в пространстве могут быть
а) параллельны;
б) совпадать;
в) пересекаться;
г) скрещиваться.

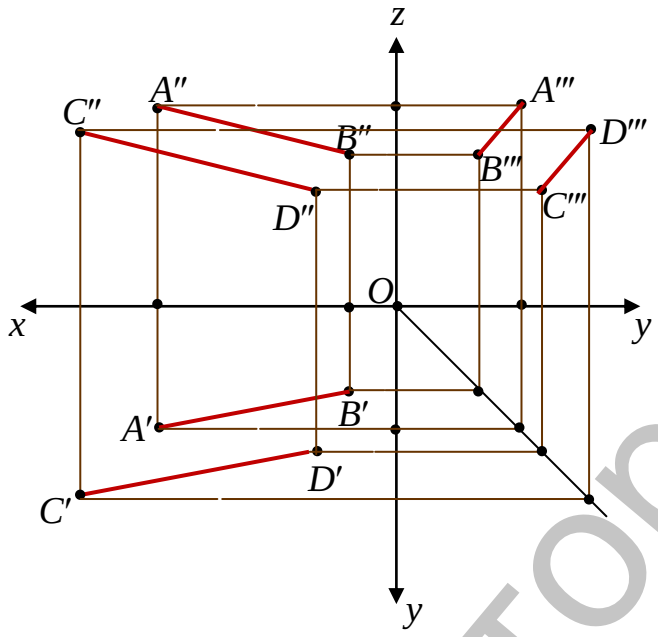


*рис.*1.26

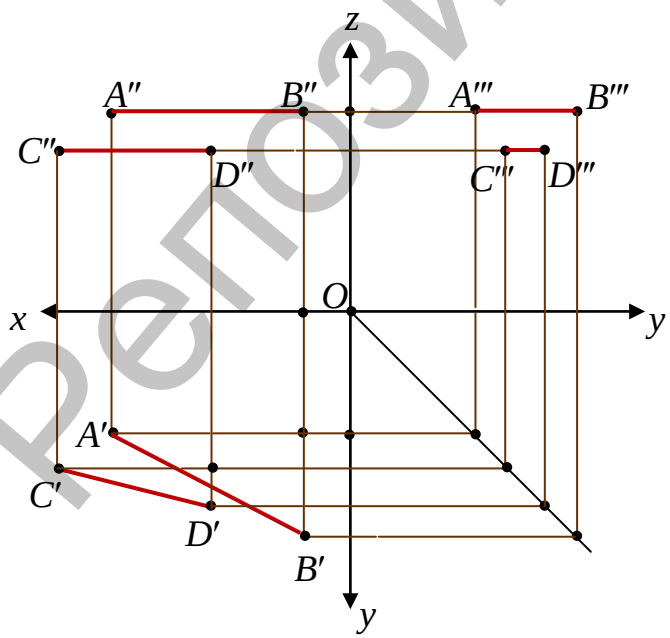


*рис.*1.27

Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают. Обратное неверно. То есть, если проекции прямых на одну или две плоскости параллельны или совпадают, то сами прямые могут скрещиваться. Для того чтобы можно было утверждать, что прямые параллельны, необходимо, чтобы их проекции на все три плоскости π_1, π_2, π_3 были параллельны или совпадали. На рисунке 1.26 показаны проекции двух параллельных прямых общего положения.

Для прямых общего положения из параллельности двух проекций автоматически получается параллельность третьих проекций. Для прямых частного положения это не так. Прямые, изображённые на рисунке 1.27 скрещиваются.

Если прямые пересекаются, то и их проекции на одноимённые плоскости тоже пересекаются, причём точки пересечения являются проекциями одной и той же точки.

Репозиторий ВГУ

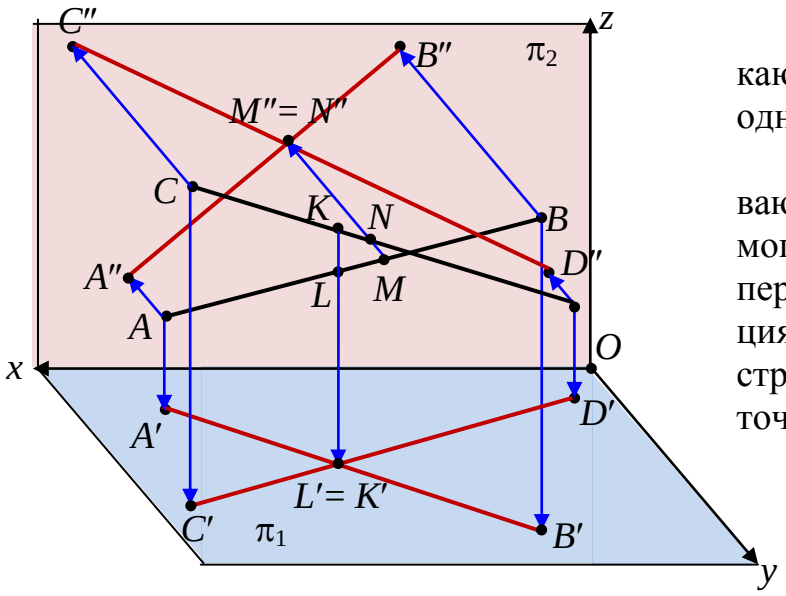


*рис.*1.28а

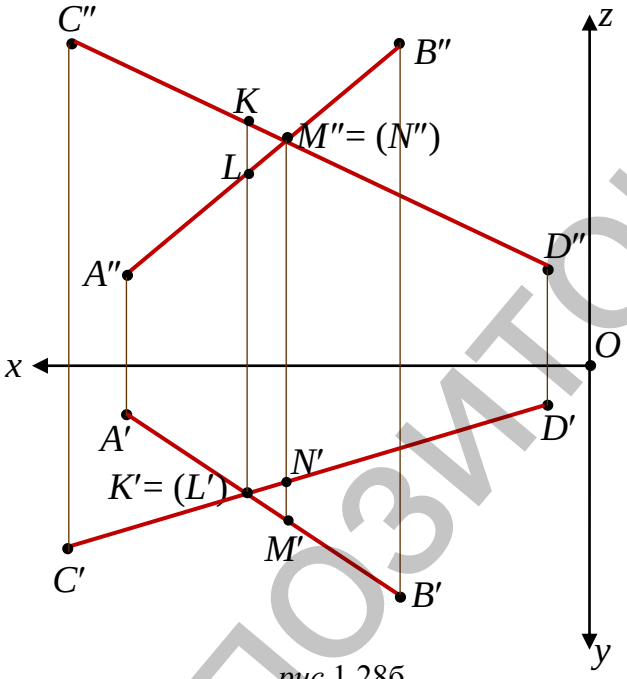


*рис.*1.28б

На рисунке 1.27 пересекаются только проекции на одну плоскость.

Если прямые скрещиваются, то их проекции тоже могут пересекаться, но точки пересечения являются проекциями разных точек пространства. На рисунке 1.28а точки K и L лежат на горизонтально-проецирующей прямой и проецируются в одну точку на плоскости π_1. Точки M и N лежат на фронтально-проецирующей прямой и проецируются в одну точку на плоскости π_2. Такие пары точек называются конкурирующими.

Точка M находится ближе к наблюдателю, чем точка N, поэтому её проекция на плоскость π_1 «накрывает» проекцию точки N. В таких случаях проекция точки N обозначается в скобках. Аналогично, точка K находится выше точки L, поэтому мы обозначаем L' в скобках.

§ 8. *Изображение плоскости на чертеже*

Определение. *Плоскостью частного положения* называется плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций. Все остальные плоскости называются *плоскостями общего положения*.

Проекция плоскости частного положения на одну или две плоскости проекций представляет собой прямую (рис.1.29) и изобразить плоскость можно только с помощью этой прямой или этих прямых. Проекции плоскости частного положения на оставшиеся плоскости проекций накрывают плоскости проекций целиком.

Репозиторий ВГУ

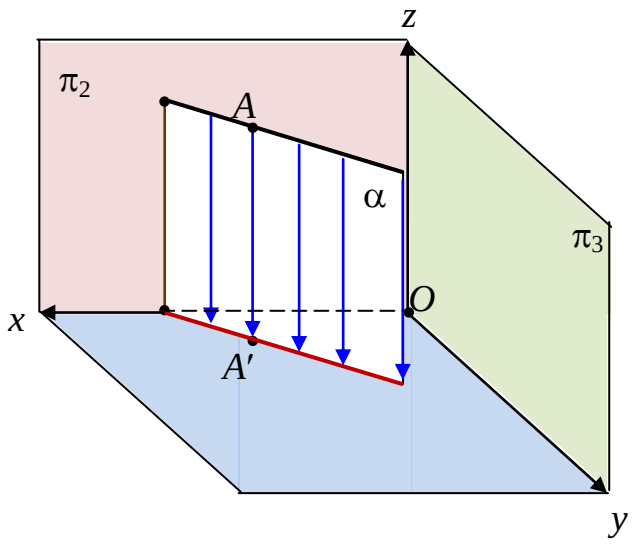


*рис.*1.29

Изобразить на чертеже плоскость общего положения саму по себе невозможно, поскольку её проекция на каждую их плоскостей π_1, π_2, π_3 накрывает соответствующую плоскость полностью. Поэтому, для того, чтобы изобразить плоскость, надо задать на чертеже некоторые определяющие её элементы. Например, плоскость будет задана, если будут заданы на чертеже

а) три её точки, не лежащие на одной прямой;
б) прямая и не лежащая на ней точка (рис. 1.30 а);
в) две различные прямые (параллельные или пересекающиеся), лежащие на плоскости (рис. 1.30 б, в);
г) любая плоская фигура, лежащая в этой плоскости, но не лежащая на одной прямой.

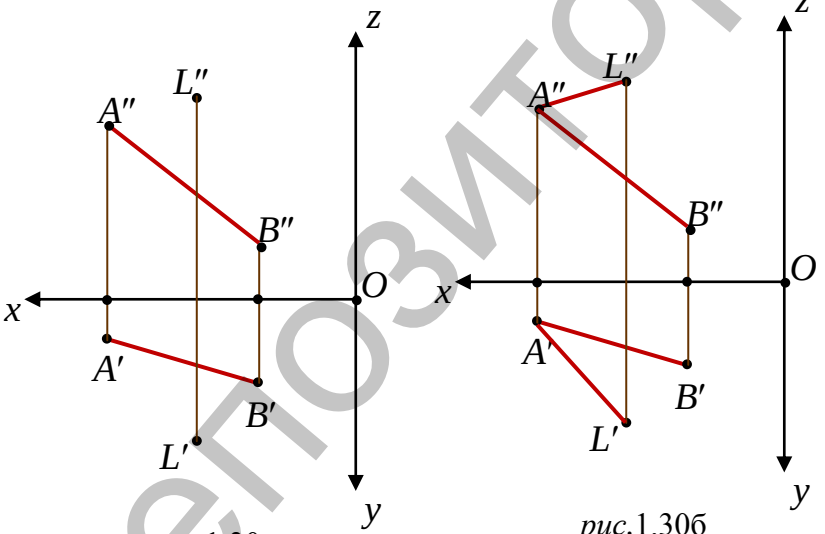


*рис.*1.30а

*рис.*1.30б

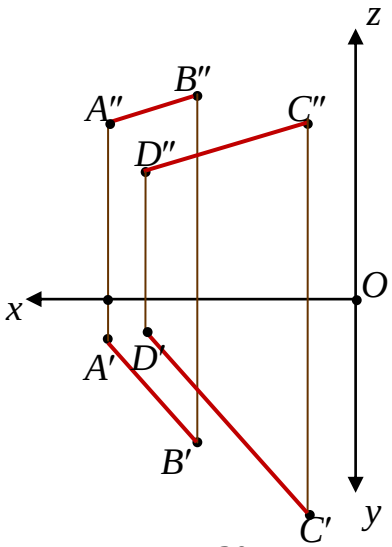


*рис.*1.30в

Но наиболее удобным является способ изображения плоскости с помощью её следов.

Определение. *Следом плоскости* называется линия пересечения плоскости с одной из плоскостей проекций.

Следы плоскости α на горизонтальной, фронтальной и профильной плоскости будем обозначать соответственно $h'_{0\alpha}$, $f''_{0\alpha}$, $p'''_{0\alpha}$. Точки пересечения следов с координатными осями обозначаем x_α, y_α, z_α.

Репозиторий БГУ

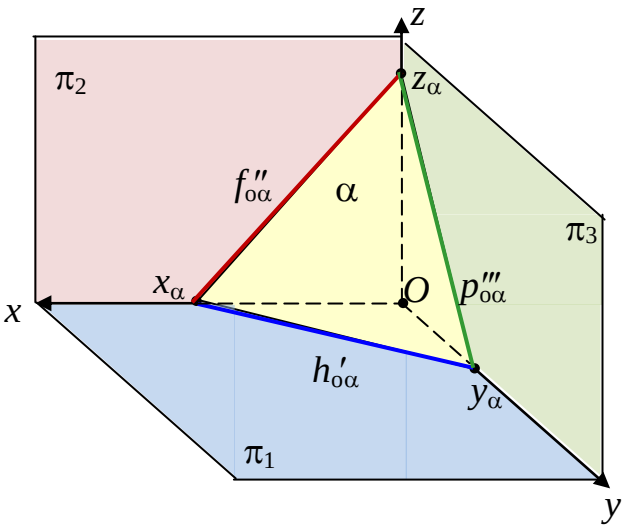


*рис.*1.31а

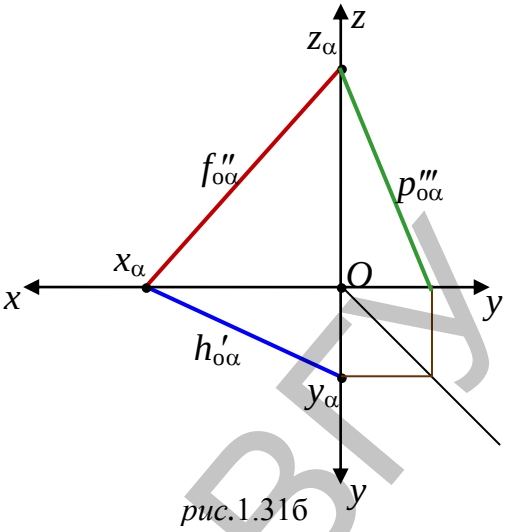


*рис.*1.31б

Имея на чертеже два следа плоскости, мы можем по линиям связи найти третий след. Ключом к решению многих задач служит утверждение: «прямая лежит на плоскости, тогда и только тогда её следы лежат на одноимённых следах плоскости».

Плоскости частного положения делятся на два типа:

1) проецирующие, которые перпендикулярны только одной из плоскостей проекций;

2) плоскости уровня, которые перпендикулярны двум плоскостям проекций, или, что то же, перпендикулярны координатным осям.

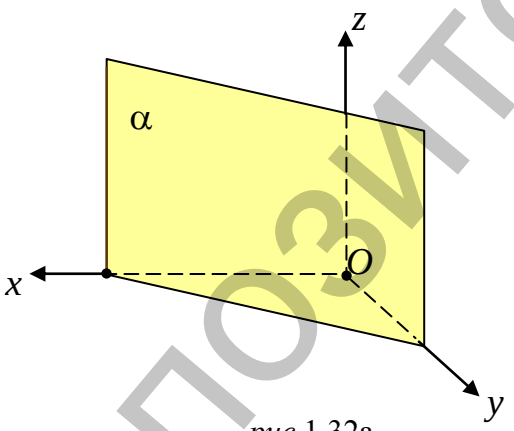


*рис.*1.32а

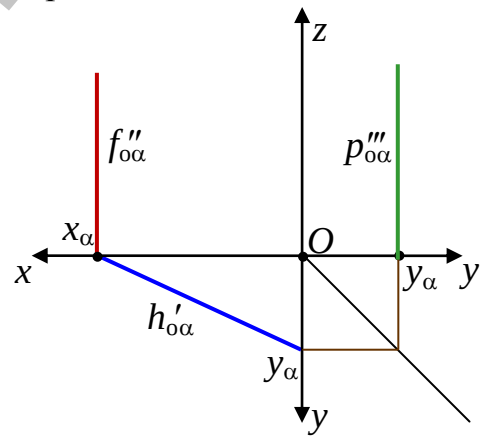


*рис.*1.32б

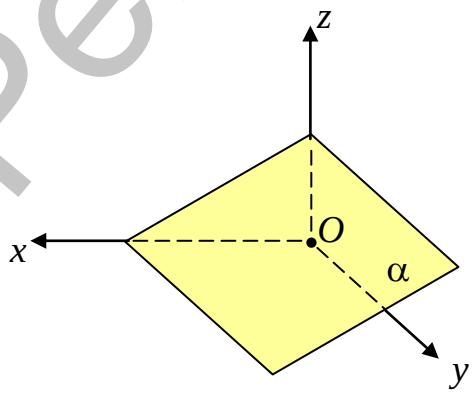


*рис.*1.33а

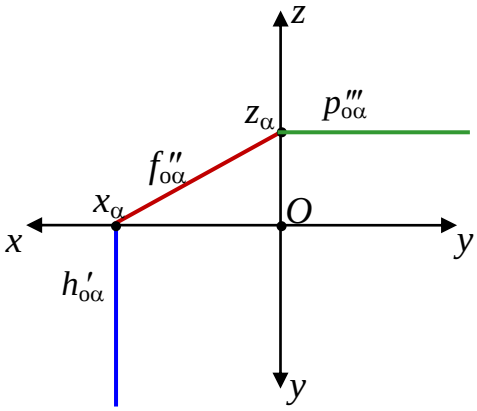


*рис.*1.33б

Репозиторий ВГУ

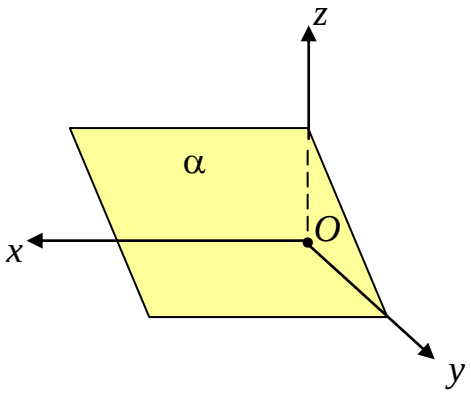


*рис.*1.34а

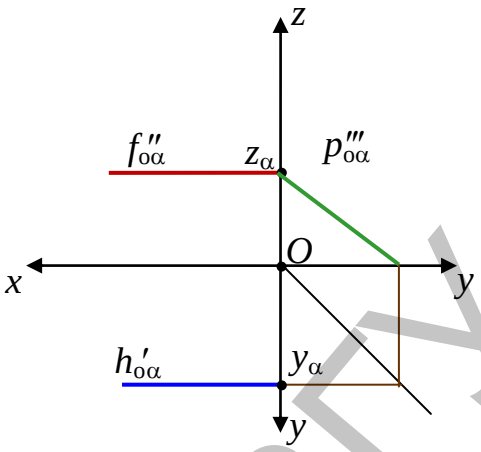


*рис.*1.34б

В свою очередь проецирующие плоскости делятся на горизонтально-проецирующие, фронтально проецирующие и профильно-проецирующие, в соответствии с названием плоскостей, которым они перпендикулярны (рис. 1.32–1.34).

Плоскости уровня делятся на горизонтальные, фронтальные и профильные, в соответствии с названием плоскостей, которым они параллельны (рис. 1.35–1.37).

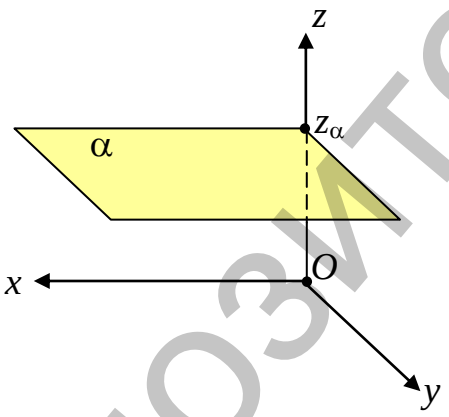


*рис.*1.35а

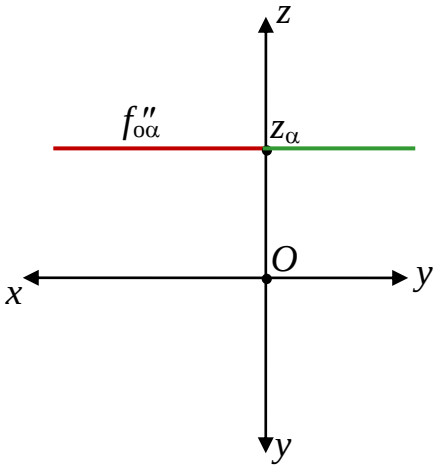


*рис.*1.35б

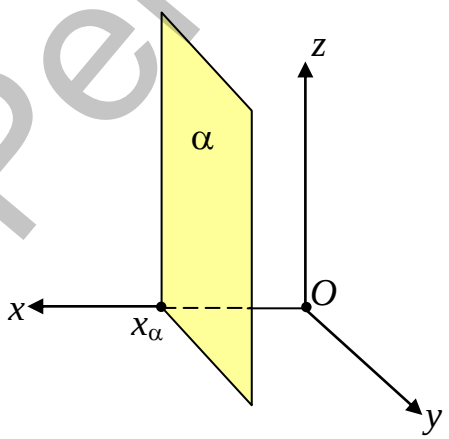


*рис.*36а

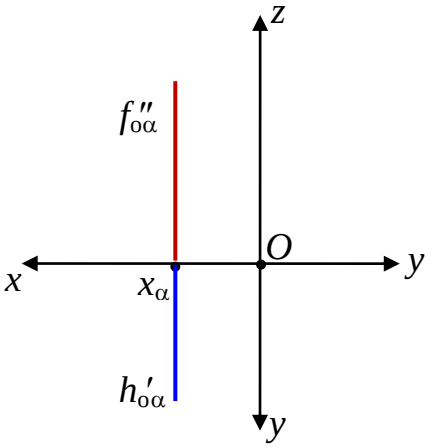


*рис.*36б

Репозиторий ВГУ

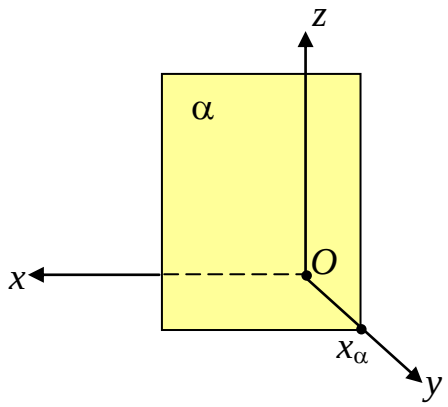


*рис.*1.37а

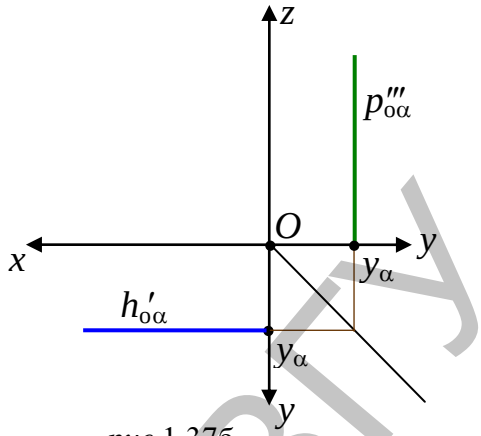


*рис.*1.37б

Мы видим, что у каждой из проецирующих плоскостей есть один след, который совпадает с её проекцией. У каждой из плоскостей уровня таких следов два. Они называются «след-проекция».

Если какой-либо объект (точка, отрезок, треугольник) лежит в плоскости, то проекция этого объекта лежит на следе-проекции плоскости. На рисунке 1.38 показано изображение горизонтально-проецирующей плоскости β и точки *C*. Поскольку *C′* лежит на горизонтальном следе-проекции $h'_{0\beta}$ плоскости β, то точка *C* лежит в плоскости β. Сложнее проверить принадлежность точки плоскости общего положения. Эту задачу мы рассмотрим в следующем параграфе.

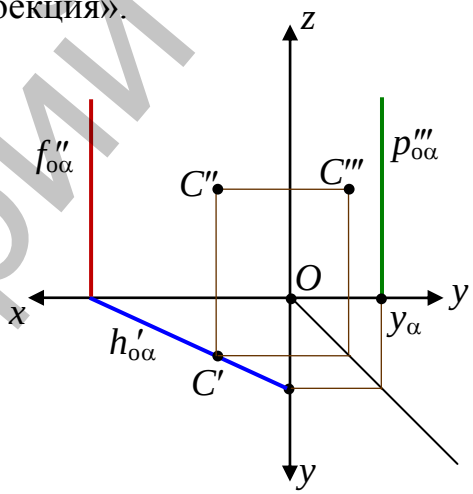


*рис.*1.38

§ 9. *Задачи на прямую и плоскость*

При решении задач мы используем следующие известные утверждения:

1) прямая лежит на плоскости, если две её точки лежат на плоскости;

2) прямая лежит в плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую плоскости параллельно некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.

***Задача* 1.** Плоскость задана двумя прямыми *AB* и *CD*. Прямая *a=EF* лежит в этой плоскости и не параллельна ни одной из прямых *AB* и *CD*. На чертеже дана только горизонтальная проекция *a′=E′F′*. Построить фронтальную проекцию *a″*.

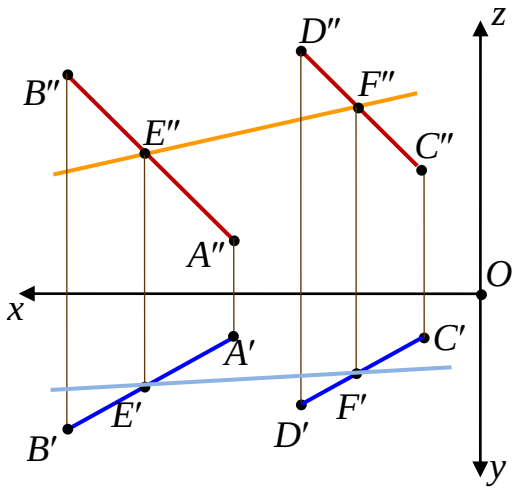


*рис.*1.39

Репозиторий ВГУ

Решение. В качестве точек E и F мы можем взять точки пересечения прямой a с AB и CD. Тогда горизонтальные проекции E', F' лежат на прямых $A'B'$ и $C'D'$. Проводим от этих точек линии связи до пересечения с $A''B''$ и $C''D''$ и найдём E'', F''.

Упражнение. На рисунке 1.39 показано решение задачи для параллельных прямых AB и CD. Самостоятельно сделайте чертёж для случая пресекающихся прямых AB и CD.

***Задача* 2.** Плоскость задана треугольником ABC. Через точку C провести прямую лежащую в этой плоскости, и не пересекающую треугольник в других точках.

Решение. Достаточно провести через C'' прямую a'' параллельную $A'B'$ и провести через C' прямую a' параллельную $A'B'$.

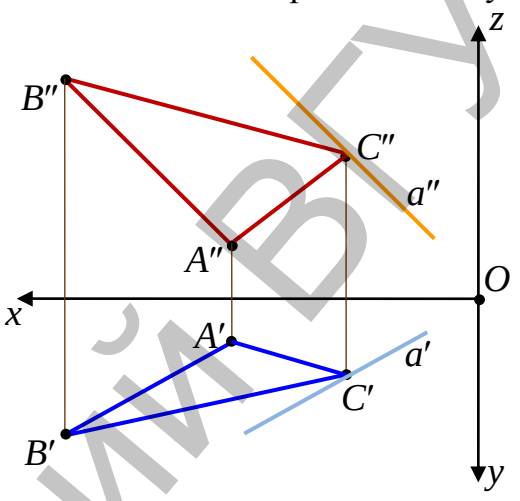


*рис.*1.40

Мы уже отмечали утверждение: «прямая лежит на плоскости, тогда и только тогда, когда её следы (если они существуют) лежат на одноимённых следах плоскости». Верно также: «прямая лежит на плоскости, если один её след лежит на следе плоскости, и прямая параллельна другому следу».

Например, на рисунке 1.42 прямая a лежит на плоскости α, потому что её фронтальный след A'' лежит на фронтальном следе плоскости, а горизонтальный след B'' лежит на горизонтальном следе плоскости.

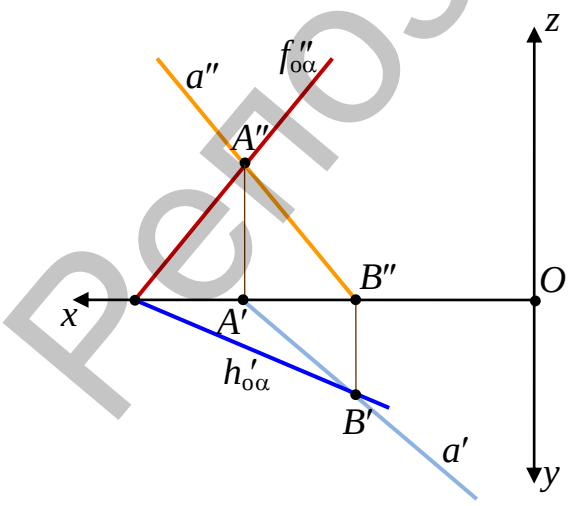


*рис.*1.41

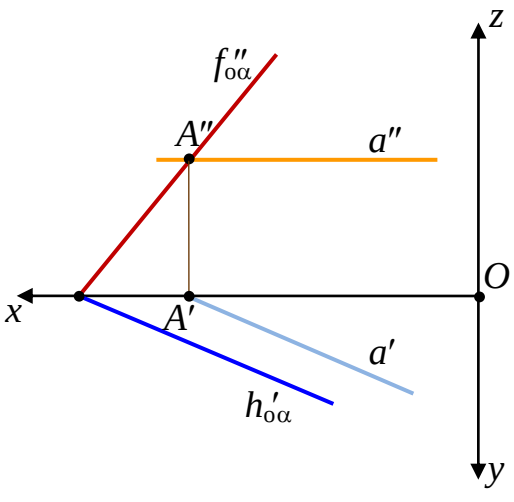


*рис.*1.42

Упражнение. Нарисуйте аксонометрические чертежи для этих случаев.

Репозиторий БГУ

***Задача* 3.** Плоскость задана треугольником ABC. Постройте следы этой плоскости.

Решение. Построим сначала горизонтальный B''след плоскости. Для этого построим горизонтальные следы двух прямых, лежащих в этой плоскости. Продлеваем $A''B''$ до пересечения с осью Ox, и находим точку X'' (рис. 1.43). Из этой точки проводим линию связи до пересечения с прямой $A'B'$, и находим X' – горизонтальный след прямой AB. Аналогично строим горизонтальный след Y' прямой BC. Теперь $h'_{0\alpha} = X'Y'$.

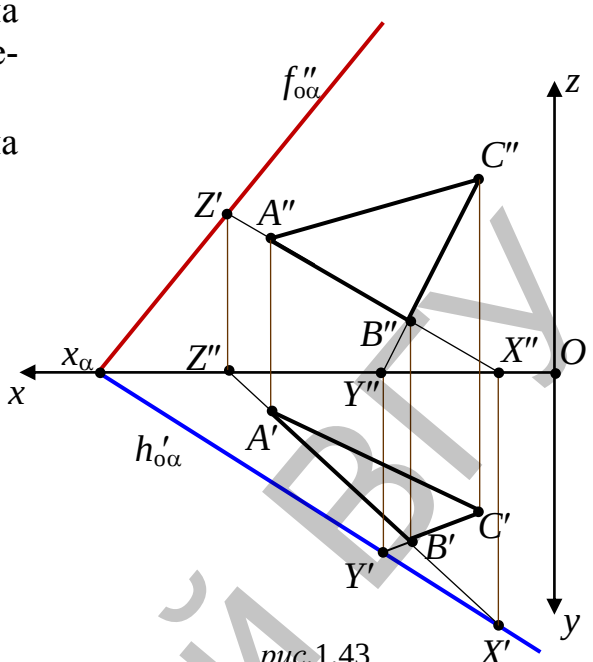


*рис.*1.43

Для построения профильного следа достаточно найти одну точку Z', поскольку у нас уже есть точка схода следов x_α.

***Задача* 4.** Плоскость α задана треугольником ABC. Точка D лежит в плоскости α, и на чертеже дана её фронтальная проекция D''. Требуется найти горизонтальную проекцию D'.

Решение. Точка лежит в плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости. Проведём через D'' прямую, соединяющую её одной из вершин треугольника $A''B''C''$ (рис. 1.44), так чтобы эта прямая не получилась параллельной противоположной стороне треугольника. Тогда эта прямая будет пересекать данную сторону треугольника, либо её продолжение. Например, пусть $D''C'' \cap A''B'' = X''$. С помощью линии связи находим X'. Проводим через линию связи, которая пересечёт прямую $C'X'$ в искомой точке D''.

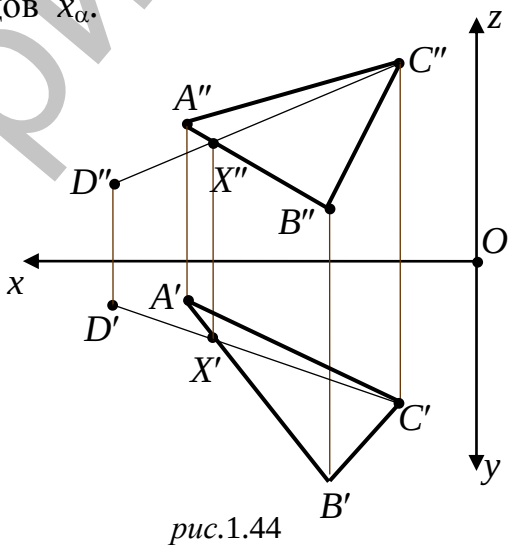


*рис.*1.44

***Задача* 5.** Плоскость α задана фронтальным и горизонтальным следами. Точка D лежит в плоскости α, и на чертеже дана её горизонтальная проекция D'.

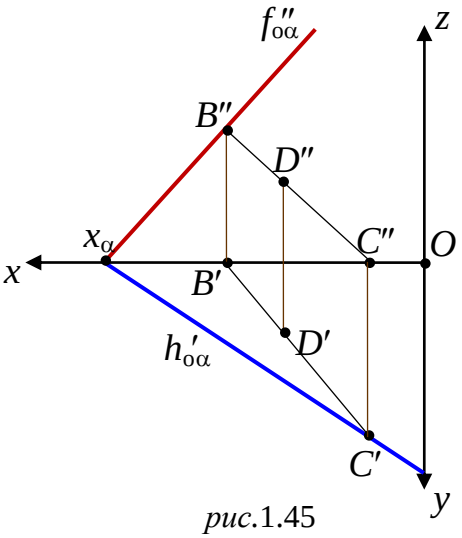


*рис.*1.45

Репозиторий ВГУ

Требуется найти фронтальную проекцию D'' (рис.1.45).

Решение. Проведём через D' прямую, которая пересечёт ось Ox в точке B', а горизонтальный след плоскости в точке C'. С помощью связи находим B'' на фронтальном следе и C'' на оси Ox. проводим через D' линию связи, которая пересечёт прямую $B''C''$ в искомой точке D''.

§ 10. *Прямые особого положения в плоскости*

Определение. Прямые, принадлежащие данной плоскости и параллельные соответственно горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостям проекций, называются соответственно *горизонталью*, *фронталью* и *профильной линией*.

Определение. Прямая, принадлежащая данной плоскости и перпендикулярная к одной из вышеперечисленных линий, называется *линией наибольшего наклона плоскости*.

Определение. *Прямыми особого положения* в плоскости называются горизонтальные линии, фронтальные линии, профильные линии и линии наибольшего наклона.

Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси Ox, профильная проекция горизонтали параллельна оси Oy (рис. 1.46). Горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу.

На рисунках 1.47–1.49 показаны горизонталь, фронталь и профильная линия в случае, когда плоскость задана треугольником.

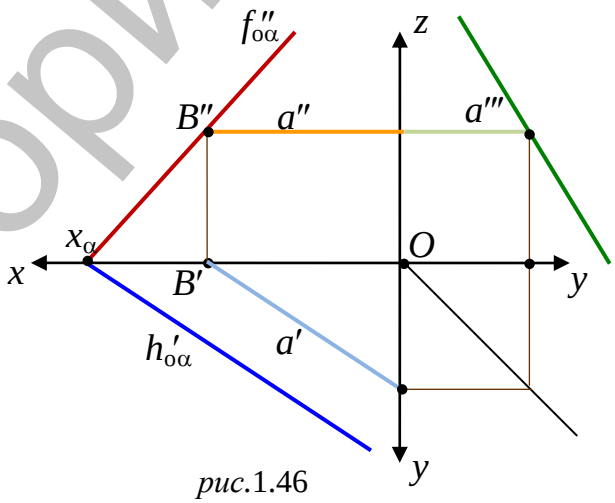


*рис.*1.46

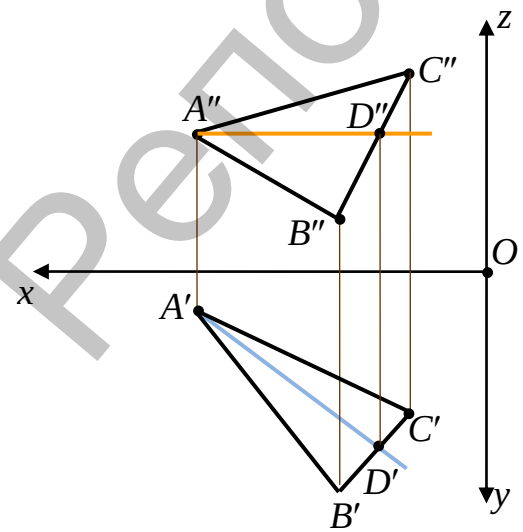


*рис.*1.47

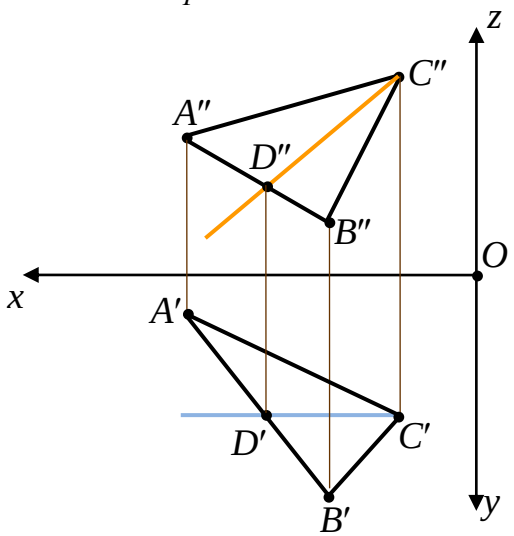


*рис.*1.48

Репозиторий ВГУ

Упражнение. Нарисуйте аксонометрические чертежи фронтали и профильной линии в случае, когда плоскость задана следами.

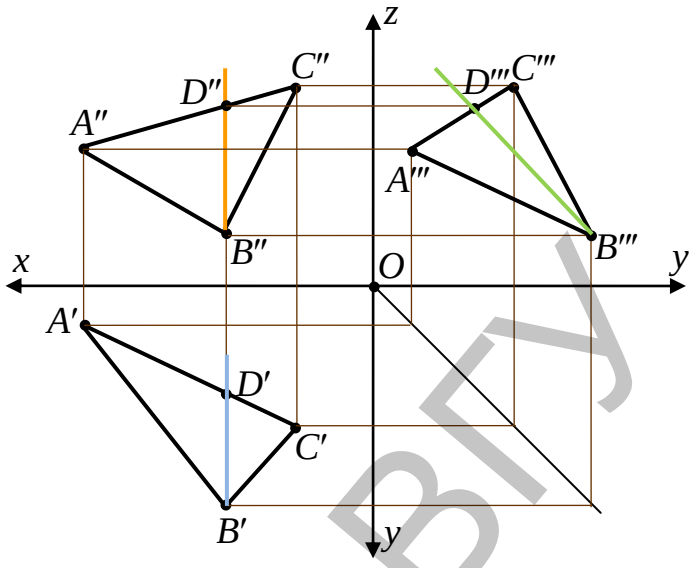


*рис.*1.49

Линии наибольшего наклона в данной плоскости делят на линии

1) наибольшего наклона относительно горизонтальной плоскости π_1;

2) наибольшего наклона относительно фронтальной плоскости π_2;

3) наибольшего наклона относительно профильной плоскости π_3.

Первая из них называется ещё *линией ската плоскости*.

Если плоскость задана своими следами, то линии наибольшего наклона перпендикулярны соответствующим следам. Например, линия ската будет перпендикулярна горизонтальному следу (рис. 1.50). Если плоскость задана треугольником, то сначала надо построить горизонталь, фронталь или профильную линию. На рисунке 1.51 построена сначала горизонталь, а затем, перпендикулярно к ней проведена линия ската.

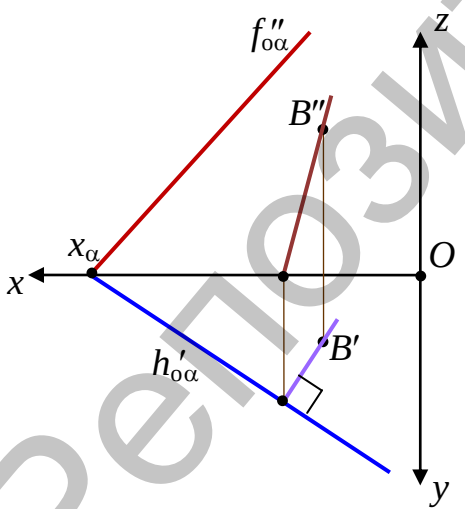


*рис.*1.50

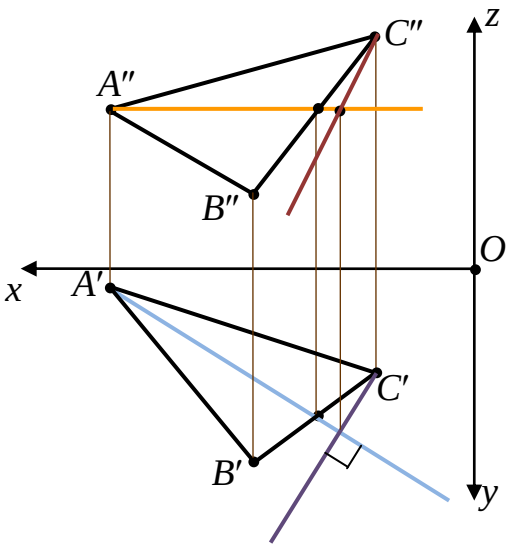


*рис.*1.51

§ 11. *Взаимное расположение прямой и плоскости и двух плоскостей*

Прямая может а) лежать в данной плоскости; б) быть параллельна ей; в) может пересекаться с плоскостью в одной точке. Прямая параллельна

Репозиторий ВГУ

плоскости, если она параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.

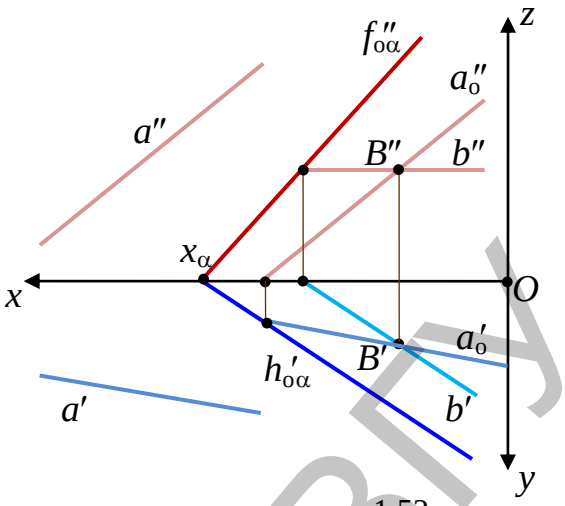


*рис.*1.52

***Задача* 1.** Плоскость задана своими следами. Определить параллельна ли данная прямая плоскости.

Решение. Выберем в плоскости произвольную точку $B(B', B'')$. Для этого сначала выберем B' (рис. 1.52) и проведём горизонталь (b', b''). Проведём через B'' прямую $a''_o||a''$ и, предполагая, что это есть фронтальная проекция прямой a_o, лежащей в плоскости, строим горизонтальную проекцию a'_o. Мы видим, что эта прямая оказалась в точности параллельна a'. Поэтому прямая a лежит в плоскости.

Можно поступить чуть иначе: перенести в точки B' и B'' прямые a' и a''. Если точка пересечения первой прямой с $h'_{o\alpha}$ и точка пересечения второй прямой с осью Ox окажутся на одной линии связи, то исходная прямая a лежит в плоскости.

Две различные плоскости могут пересекаться по прямой, либо быть параллельны. Последнее будет выполнено, если две пересекающиеся прямые в одной плоскости будут параллельны двум пересекающимся прямым во второй плоскости. Отсюда можно вывести следующее утверждение.

Теорема. Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их одноимённые следы параллельны.

***Задача* 2.** Плоскость α задана своими следами. Через данную точку (B', B'') провести плоскость $\beta||\alpha$.

Решение. Проведём через (B', B'') горизонталь, параллельную данной плоскости (рис. 1.53). Через точку D'' (фронтальный след горизонтали) проводим фронтальный след $f''_{o\beta}$ искомой плоскости, находим точку x_β схода следов и через неё проводим горизонтальный след $h'_{o\beta}$.

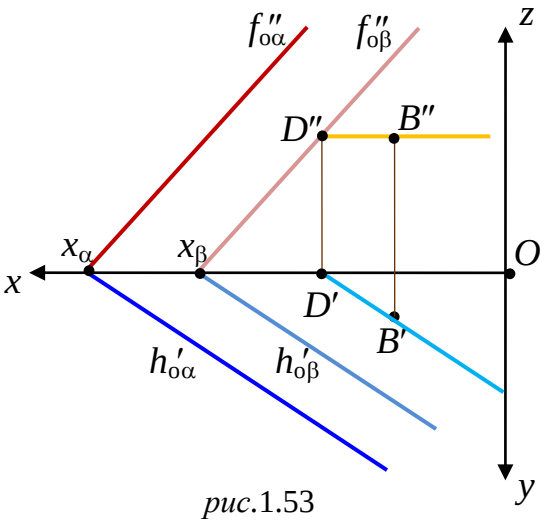


*рис.*1.53

Легко найти точку пересечения прямой с плоскостью частного положения. Эта плоскость проецируется в одну из плоскостей проекций на

Репозиторий ВГУ

свой след-проекцию. Проекция точки пересечения прямой и плоскости лежит на этом следе-проекции.

***Задача* 3.** Фронтально-проецирующая плоскость задана треугольником *ABC* (рис. 1.54), и дана прямая (*a′*, *a″*). Найти точку их пересечения.

Решение. Прямая *a″* пересекает след-проекцию плоскости в точке *N″*. С помощью линии связи находим точку *N′* на *a′*. Часть прямой *a′* показана штриховой линией, что означает, что эта часть прямой уходит под плоскость.

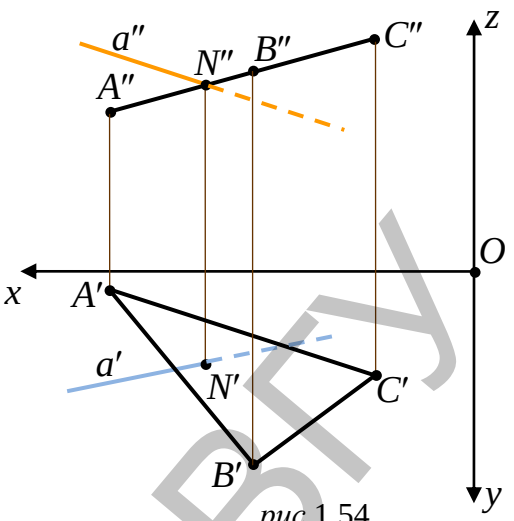


*рис.*1.54

Нахождение точки пересечения, когда такая же плоскость задана следами, показано на рисунке 1.55.

Для того чтобы найти прямую, по которой пересекаются две плоскости, достаточно найти две их точки пересечения. Если обе плоскости заданы своими следами, то в качестве таких точек можем выбрать точки пересечения одноименных следов. У каждой точки одна из проекций сразу присутствует на чертеже, а недостающая проекция лежит на координатной оси (рис. 1.56).

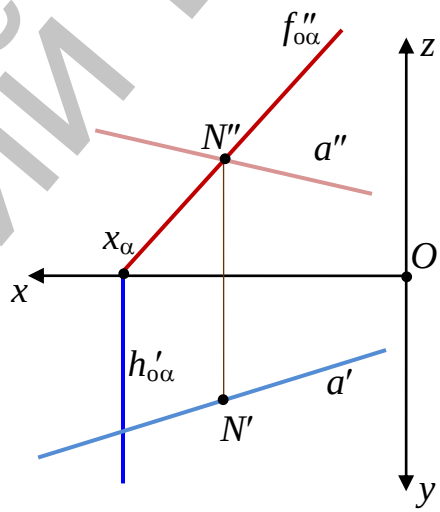


*рис.*1.55

Может оказаться, что какие-то из одноимённых следов двух плоскостей параллельны. В этом случае, проекция линии пересечения на соответствующую плоскость будет параллельна следам (рис. 1.57).

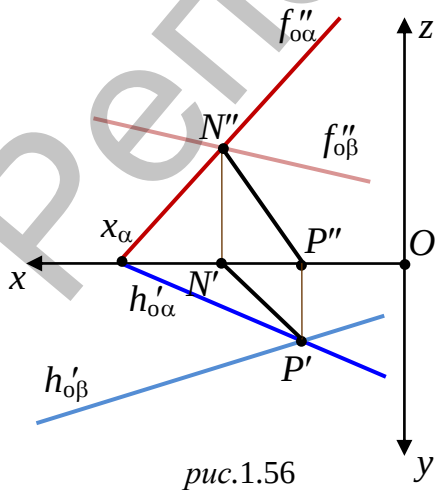


*рис.*1.56

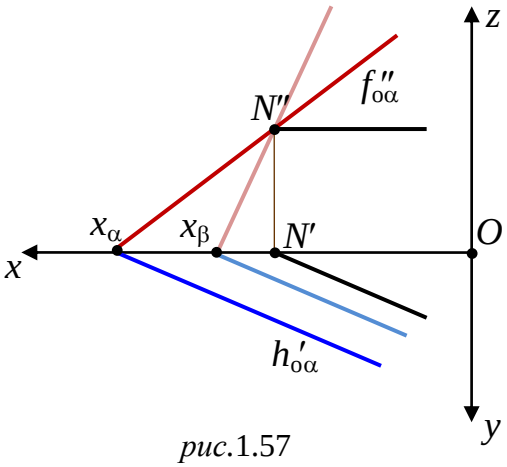


*рис.*1.57

Репозиторий ВГУ

***Задача* 4.** Горизонтально-проецирующая плоскость α задана своими следами, а плоскость β задана треугольником ABC (рис. 1.58). Найти линию их пересечения.

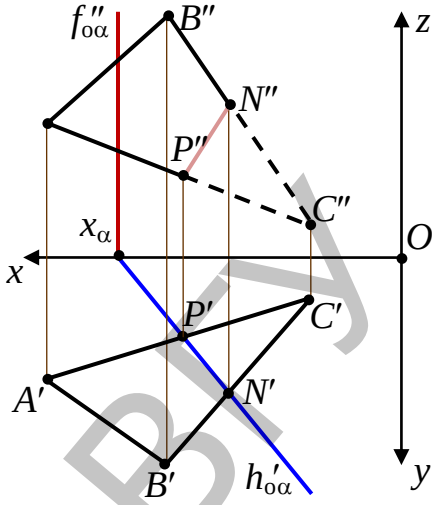


*рис.*1.58

Решение. В задаче 3 мы показали, как можно найти пересечение прямой с плоскостью частного положения. Найдём пересечение прямых AB и AC с данной плоскостью. Искомая прямая соединяет найденные точки. Если считать плоскость непрозрачной, то часть треугольника, обозначенная штриховой линией, будет невидима наблюдателю.

В случае если пересекающиеся плоскости общего положения заданы различными элементами, мы всегда можем найти сначала их следы, а затем, найти линию пересечения. Но этот путь иногда оказывается не самым простым. Существует метод использования плоскостей-посредников. Мы выбираем две плоскости γ_1 и γ_2 частного положения и находим общую точку трёх плоскостей α, β, γ_1 и общую точку трёх плоскостей α, β, γ_2. Затем мы соединяем найденные точки.

***Задача* 5.** Плоскость α задана с помощью параллельных прямых, а плоскость β задана с помощью пересекающихся прямых (рис. 1.59). Найти линию их пересечения.

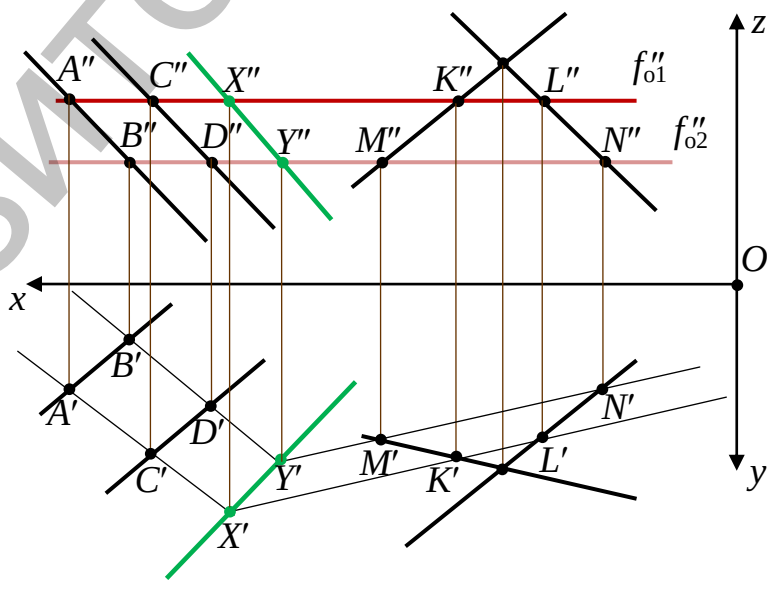


*рис.*1.59

Решение. Рассмотрим две горизонтальные плоскости γ_1 и γ_2. Мы находим точки пересечения этих плоскостей с каждой из прямых, которые задают плоскости α и β и проводим линии пересечения γ_1 и α, γ_2 и α, γ_1 и β, γ_2 и β. В пересечении первых двух линий получаем точку (X', X''), а в пересечении вторых двух линий – точку (Y', Y''). Искомая прямая соединяет эти точки.

Репозиторий ВГУ

***Задача* 6.** Две плоскости α и β заданы своими следами, но фронтальные следы пересекаются в недоступной точке. Найти линию их пересечения (рис. 1.60).

Решение. Рассмотрим горизонтальную плоскость γ. Находим линии её пересечения с α и с β. Это прямые ($N''Q''$, $N'Q'$) и ($P''Q''$, $P'Q'$). Пусть (M', M'') – точка пересечения горизонтальных следов. Тогда ($M''Q''$, $M'Q'$) – искомая прямая.

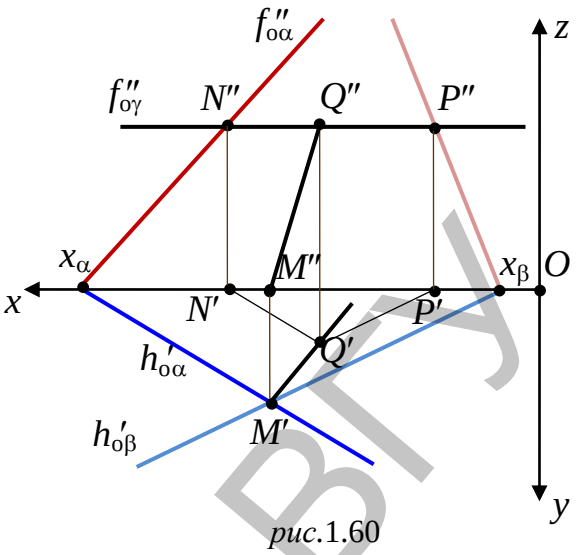


*рис.*1.60

Для того чтобы построить пересечение прямой с плоскостью общего положения, также удобно использовать вспомогательную плоскость частного положения. Рассмотрим эту задачу на пространственном чертеже (рис.1.61). Пусть β – горизонтально-проецирующая плоскость, которая проходит через прямую a и тем самым, проходит также через горизонтальную проекцию a' прямой a. Найдём точку пересечения a' с координатной осью Ox или Oy и проведём либо фронтальный, либо профильный след плоскости β параллельно Oz. Сама прямая a' – это горизонтальный след плоскости β. Точки A' и B'' (или B''') – это точки пересечения

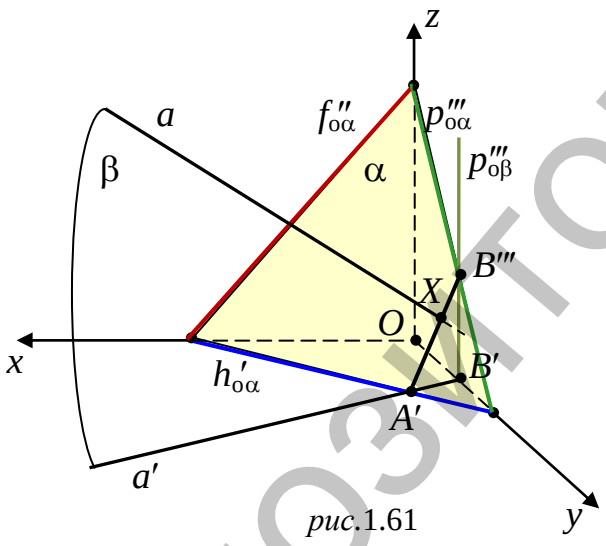


*рис.*1.61

одноимённых следов двух плоскостей. Соединяя их, мы найдём линию пересечения плоскостей. Точка X пересечения прямой a с плоскостью α лежит на этой прямой.

Теперь выполним это построение на эпюре, с той лишь разницей, что плоскость β теперь будет иметь фронтальный след, который совпадает с линией связи $B'B''$ (рис. 1.62). Линия пересечения плоскостей – это ($A'B'$, $A''B''$). Фронтальные проекции этой

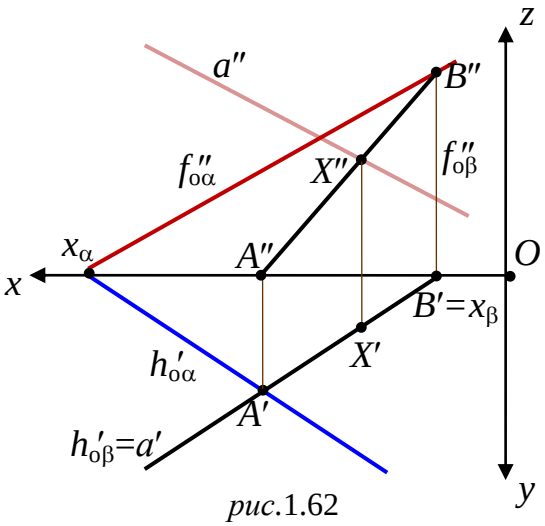


*рис.*1.62

Репозиторий ВГУ

линии и прямой a пересекаются в точке X''. С помощью линии связи находим X'. (X', X'') – искомая точка.

***Задача* 7.** Плоскость α задана треугольником CDE (рис. 1.63), и дана прямая (a', a''). Найти их точку пересечения.

Решение. Так же как в задаче 4 мы находим линию $(P'N', P''N'')$ пересечения плоскостей α и β. Искомую точку (X', X'') находим так же, как и в предыдущей задаче.

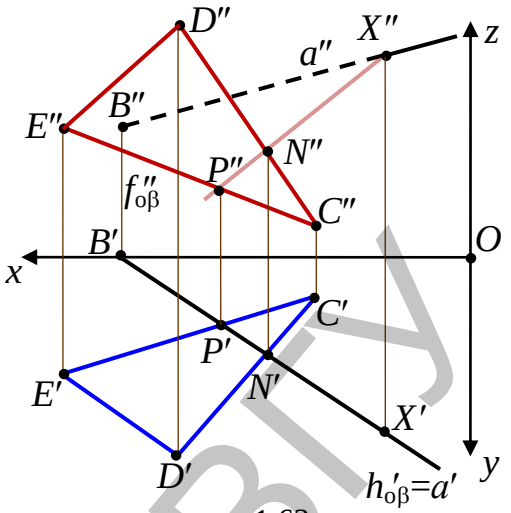


*рис.*1.63

§ 12. *Перпендикулярность прямых и плоскостей*

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости. В этом случае она перпендикулярна любой прямой из этой плоскости.

Если прямые a и b перпендикулярны, то их проекции будут тоже перпендикулярны, только в том случае, когда одна из них параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна этой плоскости. Для того чтобы построить перпендикуляр к плоскости на эпюре следует использовать две прямые, лежащие в данной плоскости, одна из которых параллельна какой-либо из плоскостей проекций, а вторая параллельна другой плоскости проекций.

Если плоскость α задана следами, то именно следы можем взять в качестве таких прямых (рис.1.64). На этом же рисунке найдена точка пересечения перпендикуляра с плоскостью α.

***Задача* 1.** Плоскость α задана треугольником ABC (рис. 1.65), и дана точка (D', D''). Построить перпендикуляр, проведённый через эту точку к плоскости α.

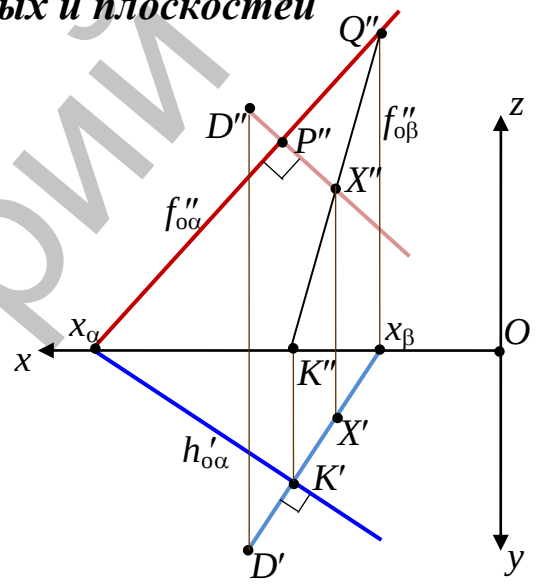


*рис.*1.64

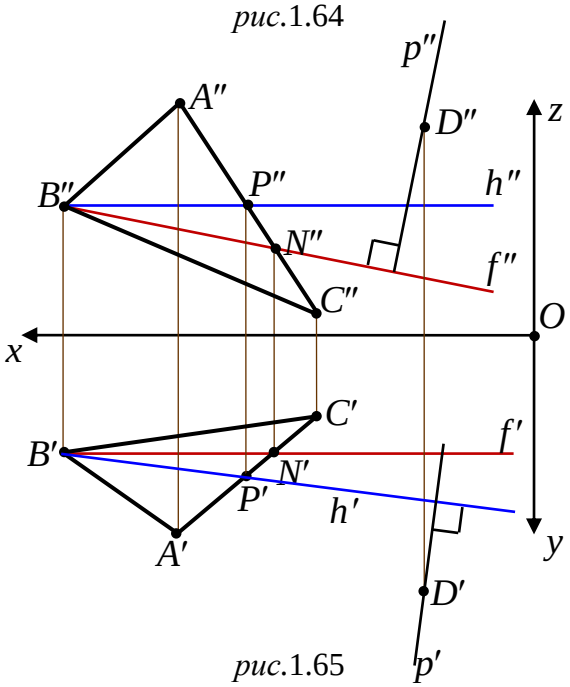


*рис.*1.65

Репозиторий ВГУ

Решение. Построим фронталь (f', f'') и горизонталь (h', h''), лежащие в плоскости α. Построим $p'' \perp f''$ и $p' \perp h'$. Тогда (p', p'') – искомая прямая.

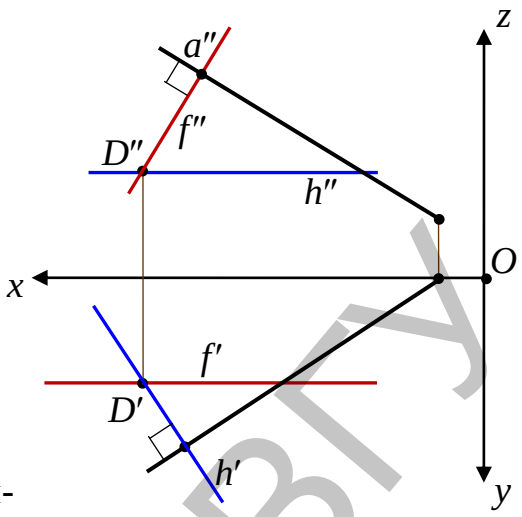


*рис.*1.66

***Задача* 2.** Даны прямая (a', a'') и точка (D', D''). Построить плоскость, перпендикулярную этой прямой и проходящую через данную точку.

Решение. Построим фронталь (f', f'') и горизонталь (h', h''), перпендикулярные данной прямой (рис.1.66). Они задают искомую плоскость.

Если плоскость имеет частное положение, то и перпендикулярная к ней прямая тоже имеет частное положение. Так, например, перпендикуляром к горизонтально-проецирующей плоскости будет горизонталь.

Через данную точку, лежащую на прямой можно провести бесконечное число прямых, перпендикулярных к данной прямой. Все они лежат в одной плоскости. Если требуется провести перпендикуляр к данной прямой через точку не лежащую на этой прямой, то мы сначала проводим плоскость, перпендикулярную к данной прямой, и уже в этой плоскости проводим искомую прямую.

***Задача* 3.** Даны прямая (a', a'') и точка (D', D''). Построить прямую, перпендикулярную к прямой (a', a'') и проходящую через данную точку.

Решение. Построим фронталь (f', f'') и горизонталь (h', h''), которые задают плоскость $\beta \perp a$, проходящую через D (рис.1.67). Далее нам нужно найти точку пересечения прямой и плоскости. Для этого мы рассмотрим фронтально-проецирующую плоскость α, для которой a'' является следом-проекцией и найдём линию пересечения плоскостей α и β. Для этого мы найдём точки пересечения $L = h \cap \alpha$ и $K = f \cap \alpha$. Для горизонтали h и прямой a точка L'' является конкурирующей, но горизонталь h

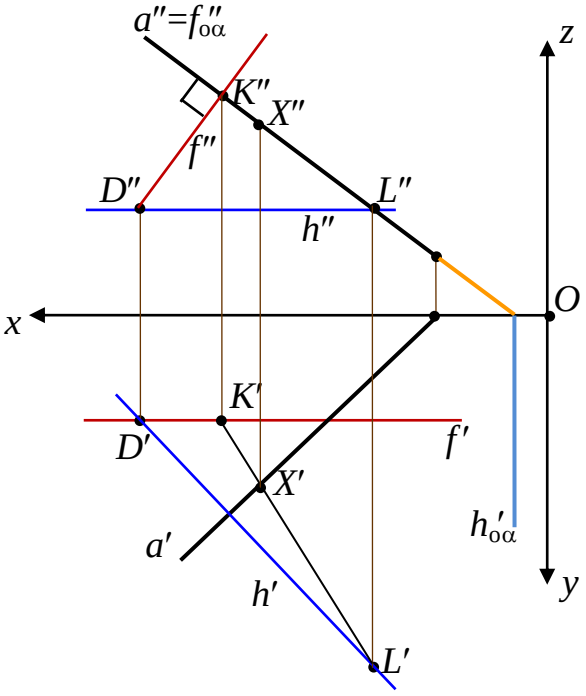


*рис.*1.67

Репозиторий ВГУ

пересекается с плоскостью α в этой точке. Такая же ситуация и с фронталью f. Искомая точка – это $X = KL \cap a$.

Если прямая (a', a'') имеет частное положение, то решение задачи 9 сильно упрощается. В этом случае прямая параллельна одной из плоскостей проекций, а следовательно, проекция перпендикуляра на эту плоскость будет перпендикулярна проекции прямой. На рисунке 1.68 показано решение задачи для горизонтали (h', h'').

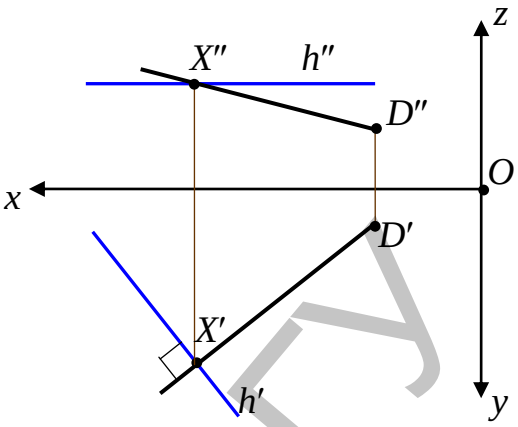


*рис.*1.68

Задания для самостоятельного решения

В задачах, где не заданы не все данные, необходимые для однозначного решения задачи, следует выбрать эти данные самостоятельно.

I. Задачи на построение точек.

1.1. Построить три проекции точки $A(30,20,10)$.

1.2. Построить три проекции точки B, принадлежащей фронтальной плоскости проекций.

2.1. Построить три проекции точки K, принадлежащей оси Oz. Записать её координаты.

2.2. Построить недостающую проекцию точки F. Определить её положение и её координаты (рис. 1.69). Единичный отрезок e задан.

3.1. Построить три проекции точки M, равноудаленной от фронтальной и профильной плоскостей на 20 мм.

3.2. Построить три проекции точки N, расположенной правее точки на 20 мм (рис. 1.70). Единичный отрезок e имеет длину 10 мм.

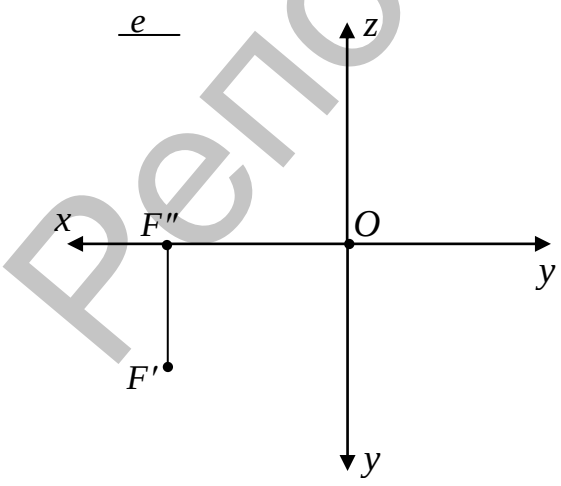


рис. 1.69

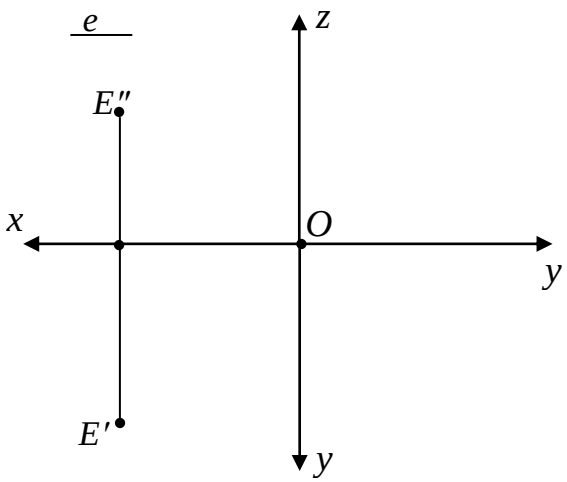


рис. 1.70

Репозиторий ВГУ

II. Задачи на построение отрезков.

1.1. Построить три проекции отрезка *AB*: *A*(10,15,5), *B*(35,25,30).

1.2. Построить три проекции отрезка *AB*, перпендикулярного горизонтальной плоскости проекций.

2.1. Построить три проекции отрезка *AB*: *A*(5, 15, 10); *B*(30, 25, 30). Построить на отрезке *AB* точку *C*, удаленную от профильной плоскости проекций на расстояние 20 мм.

2.2. Построить три проекции отрезка *CE* общего положения, правый конец которого точка *C* находится на оси *Oz*.

3.1. Построить три проекции отрезка *AB*, параллельного горизонтальной плоскости, если известны координаты точки *A*(30,25,30), а точка *B*, удалена от фронтальной плоскости проекций на расстояние 5 мм.

3.2. Построить три проекции пересекающихся прямых *AB* и *CD*: при этом прямая *AB* параллельна горизонтальной плоскости проекций, а *CD* перпендикулярна профильной плоскости проекций.

III. Задачи на плоскость.

1.1. Определить и записать, чем задана и как расположена плоскость. Построить недостающую проекцию точки *K*, принадлежащей плоскости (рис. 1.71).

1.2 Построить две проекции фронтально-проецирующей плоскости, заданной прямой и точкой.

2.1. Определить (построением), принадлежит ли точка *A*(*A′*, *A″*) плоскости общего положения β, заданной двумя параллельными прямыми (*m′*, *m″*), (*n′*, *n″*) (рис. 1.72).

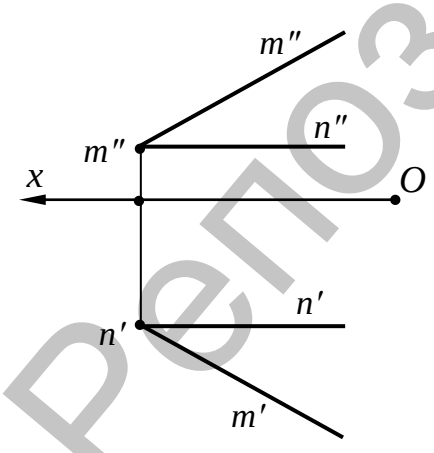


рис. 1.71

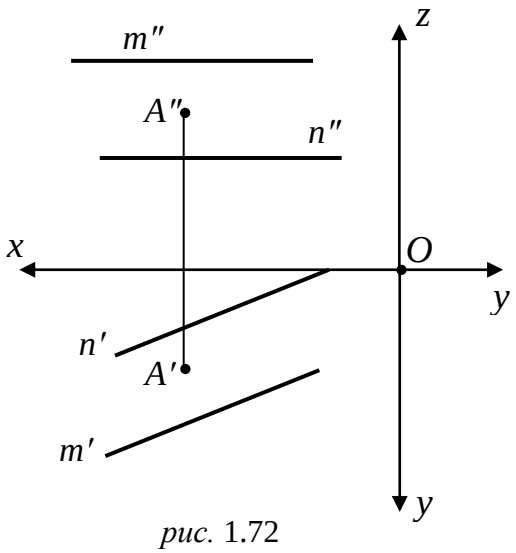


рис. 1.72

2.2. Построить следы горизонтально-проецирующей плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми.

3.1. Достроить горизонтальную и построить профильную проекцию плоского четырехугольника *ABCD* (рис. 1.73).

Репозиторий БГУ

3.2. Построить проекции отрезка AB, принадлежащего плоскости γ, заданной тремя точками (K', K''), (L', L''), (M', M'') (рис. 1.74).

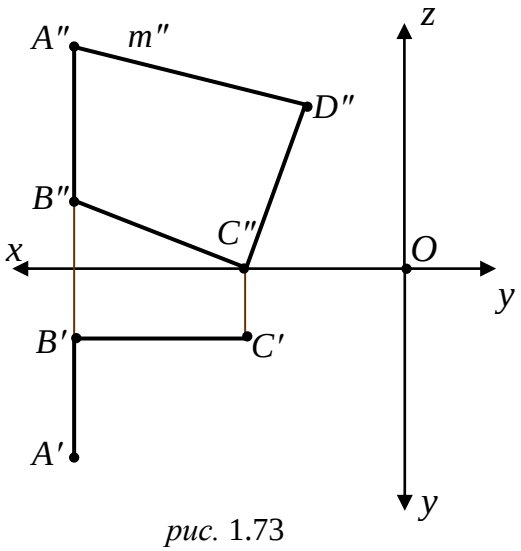


рис. 1.73

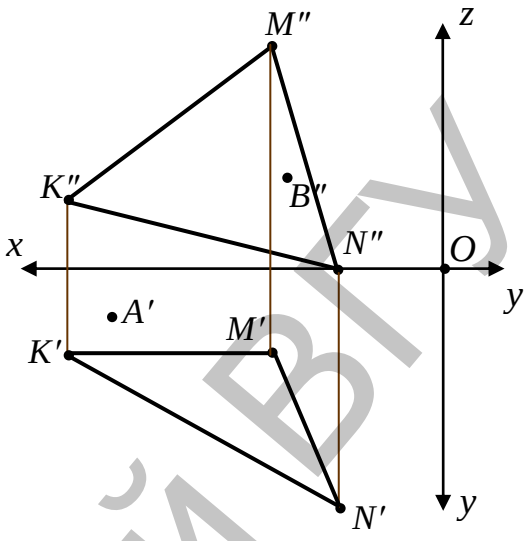


рис. 1.74

Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Точка в системе плоскостей проекций

1. Как называется плоскость проекций, расположенная перпендикулярно к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций?

2. Что такое эпюр Монжа?

3. Какой координатой измеряется расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекций?

4. Что такое линии связи?

5. Что называется октантом?

6. Если координата X точки A равна 0, то на какой плоскости проекций лежит точка A?

7. Построить проекции точек $S(0, 25, 10)$, $T(0, 0, 30)$. Как расположены эти точки?

8. Постройте проекции точки T, если ее координата $z = 0$.

2. Прямая

1. Какой координатой измеряется расстояние от заданной точки A до фронтальной плоскости проекций?

2. Какая прямая называется прямой общего положения?

3. Как располагаются проекции фронтальной прямой уровня, фронтально-проецирующей прямой?

4. Что называется следом прямой?

5. В какой плоскости проекций лежит горизонтальный след прямой?

6. Какой след отсутствует у профильной прямой уровня?

Репозиторий ВГУ

7. Какой плоскости проекций параллельна горизонтальную линию уровня?

8. Постройте эпюре фронтальную линию уровня, которая пересекает ось *Oy*.

9. Каким плоскостям проекций параллельна профильно-проецирующая прямая?

10. На какие плоскости проекций отрезок фронтально-проецирующей прямой AB проецируется в натуральную величину?

11. Какие точки называются конкурирующими?

12. Начертите на эпюре пересекающиеся прямые, точка пересечения которых имеет координаты $(20, 30, 50)$.

13. Начертите на эпюре прямую, пересекающую ось Ox в точке $C(25, 0, 0)$.

3. Плоскость

1. Как можно задать плоскость на чертеже?

2. Как расположена горизонтальная плоскость уровня?

3. Что называется следом плоскости?

4. Как называется плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций?

5. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.

6. Как определить принадлежность прямой линии плоскости общего положения, если плоскость задана следами?

7. Когда прямая принадлежит плоскости?

8. Когда прямая параллельна плоскости?

9. Параллельна ли прямая плоскости, если ее проекции параллельны следам плоскости?

10. Может ли горизонтальная линия уровня быть параллельна

а) горизонтально-проецирующей плоскости?

б) фронтально-проецирующей плоскости?

11. В какую проецирующую плоскость нужно заключать прямую для того, чтобы найти точку пересечения ее с плоскостью?

12. Сколько точек пересечения имеет прямая с плоскостью?

13. Будет ли пересекать фронтально-проецирующая прямая горизонтальную плоскость проекций?

14. Когда прямой угол равен по величине своей проекции?

15. Может ли проекция острого или тупого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, равняться самому углу в пространстве?

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 2. АКСОНОМЕТРИЯ

Аксонометрия означает «осеизмерение». Способ аксонометрического проецирования заключается в том, что объект проецируют на плоскость вместе координатными осями декартовой системы координат. Для более наглядной демонстрации этого способа проецирования нам следует сначала выяснить некоторые особенности изображения окружности.

§ 1. *Изображение окружности и эллипса*

Пусть окружность лежит в плоскости $\bar{\sigma}$ и мы строим её параллельную проекцию на плоскость σ по направлению вектора $\vec{\mathbf{p}}$. Пусть l – это линия пересечения плоскостей.

Тогда при проецировании длина всех отрезков, параллельных l не меняется, а все отрезки, перпендикулярные l, сжимаются или растягиваются в одной и той же пропорции. Тем самым, окружность равномерно сжимается или растягивается по одному направлению. Поэтому проекция окружности будет эллипсом.

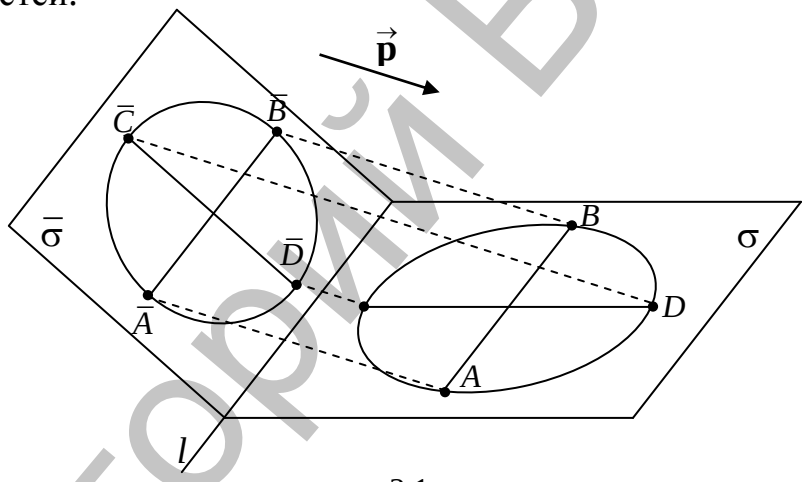


рис. 2.1

Пусть $\bar{A}\bar{B}$ и $\bar{C}\bar{D}$ – взаимно перпендикулярные диаметры окружности $\bar{\gamma}$ (рис. 2.2). Мы знаем, что все хорды параллельные к $\bar{A}\bar{B}$ делятся $\bar{C}\bar{D}$ пополам; касательная $\bar{l}$, проведённая к окружности через точку $\bar{C}$ или $\bar{D}$, перпендикулярна $\bar{C}\bar{D}$, т.е. она параллельна $\bar{A}\bar{B}$. При параллельном проецировании сохраняется параллельность прямых и деление отрезка пополам. Поэтому на изображении (рис. 2.3) CD будет делить хорды, параллельные к AB пополам и изображение l касательной в точке C будет параллельно к AB.

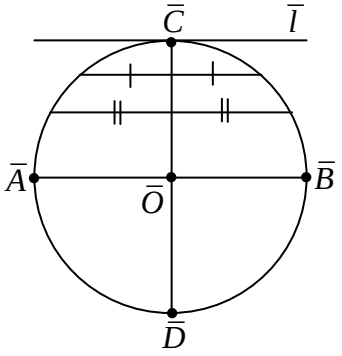


рис. 2.2

Определение. Диаметр CD, делящий хорды, параллельные к диаметру AB пополам, называется *сопряжённым* к диаметру AB.

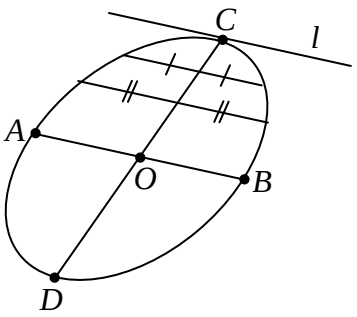


рис. 2.3

Репозиторий ВГУ

Свойство диаметров быть сопряжёнными взаимное: т.е. диаметр AB будет делить пополам хорды, параллельные к CD.

Итак, *изображением окружности является эллипс, при этом перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряжёнными диаметрами эллипса*.

§ 2. *Аксонометрическое проецирование*

Определение. Координатные оси в пространстве и координаты точки в декартовой СК мы будем называть *оригинальными* или *натуральными*. Проекции координатных осей на плоскость изображений σ мы будем называть *аксонометрическими осями*, а координаты точки в этих осях мы будем называть *аксонометрическими координатами*. Фигуру в пространстве мы будем называть *оригиналом*, а её проекцию будем называть *изображением*.

В зависимости от расположения плоскости проекций и от направления проецирования мы можем получить различные изображения. Мы не будем полностью формулировать теорему Польке-Шварца, но главным следствием из неё является следующее. *Любые три прямые, проходящие через одну точку и не совпадающие между собой могут быть приняты за аксонометрические оси*. При этом, проекция не обязательно является ортогональной.

Предполагается, что на каждой натуральной координатной оси отложен единичный отрезок. В результате проецирования мы получим изображения единичных отрезков e_x, e_y, e_z на аксонометрических осях. Все эти отрезки могут получиться не перпендикулярными друг другу и не равными между собой. Также, они могут быть не равны единичному отрезку e.

ГОСТ 2.317-69 предусматривает следующие виды аксонометрических проекций:

1) прямоугольная изометрия;
2) прямоугольная диметрия;
3) фронтальная (косоугольная) диметрия.

Определение. Соотношения $u = \frac{e_x}{e}$, $v = \frac{e_y}{e}$, $w = \frac{e_z}{e}$ называются *коэффициентами искажения по аксонометрическим осям*. Если все эти коэффициенты равны ($e_x = e_y = e_z$), то проекция называется *изометрической*. Если равны друг другу только два коэффициента, то проекция называется *диметрической*. Если все коэффициенты искажения различны, то проекция называется *триметрической*.

На практике чаще всего используется фронтальная *диметрическая проекция*, при которой коэффициент искажения по осям Ox и Oz принимается равным 1, а по оси Oy равным 0,5. При этом $Ox \perp Oz$, а ось Oy образует углы по 135° с другими осями (рис. 2.4). Эта проекция ещё называется *кабинетной*.

Репозиторий ВГУ

Иногда используется проекция при которой ось Oy образует угол 120° с осью Ox (рис. 2.5).

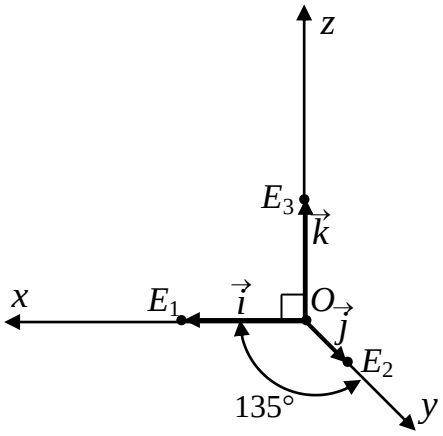


рис. 2.4

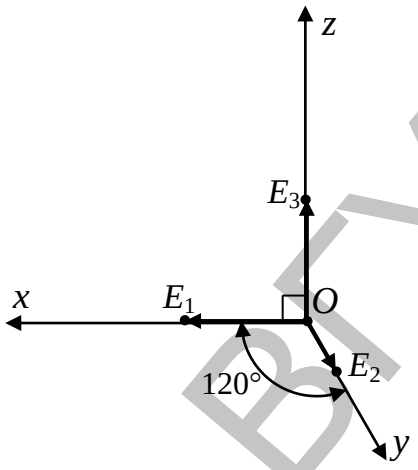


рис. 2.5

На рисунке 2.6 изображена *фронтальная изометрическая проекция*, которая ещё называется *кавальерной*. Все рассмотренные выше проекции могут быть получены только при косоугольном проецировании. При ортогональном проецировании можно получить прямоугольную изометрическую проекцию, изображённая на рисунке 2.7. Все коэффициенты искажения в ней равны $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$.

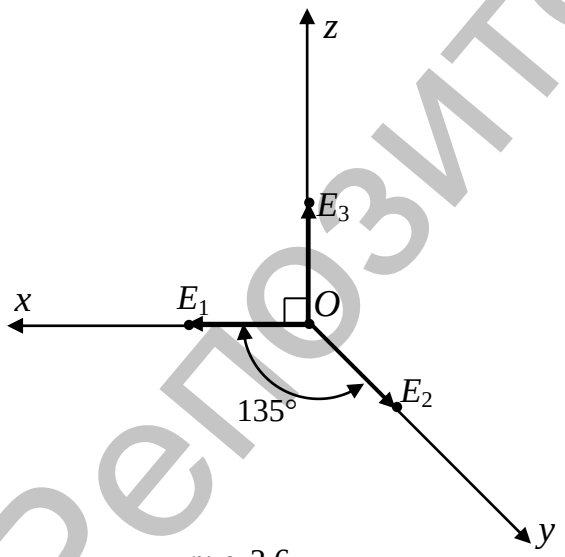


рис. 2.6

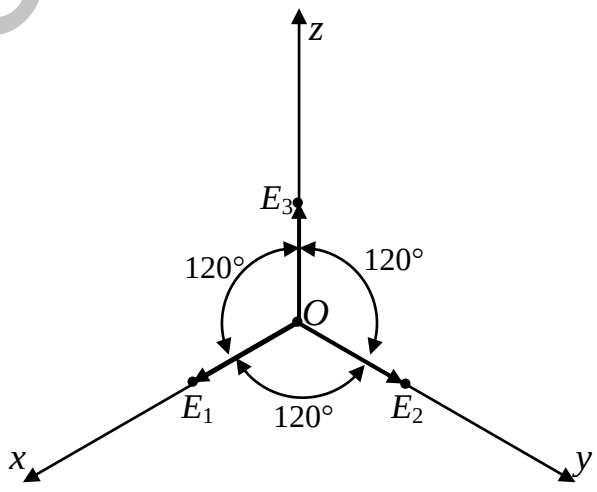


рис. 2.7

На следующих рисунках 2.8–2.11 показано, как выглядят проекции куба (квадраты) на координатные плоскости в каждом из рассмотренных выше видов проекций.

Репозиторий ВГУ

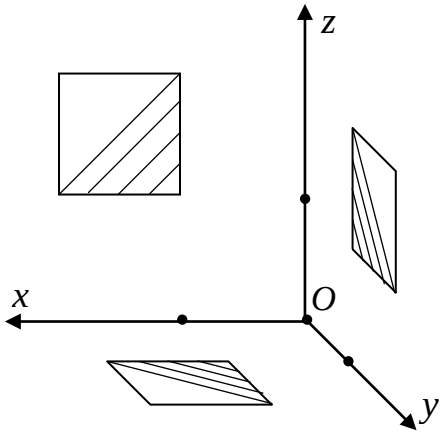


рис. 2.8

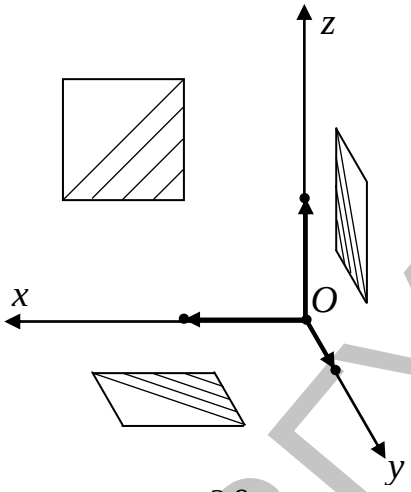


рис. 2.9

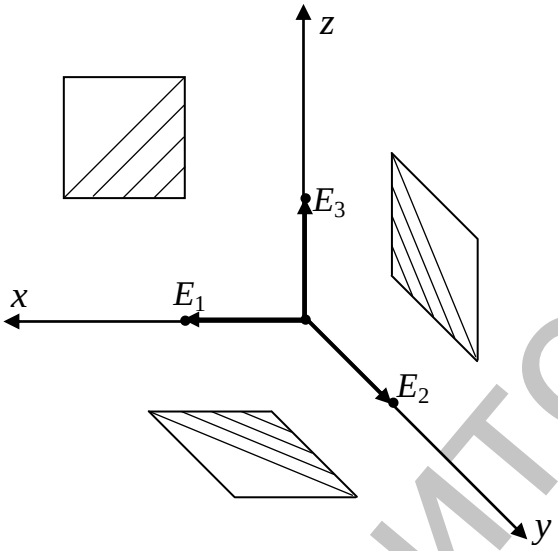


рис. 2.10

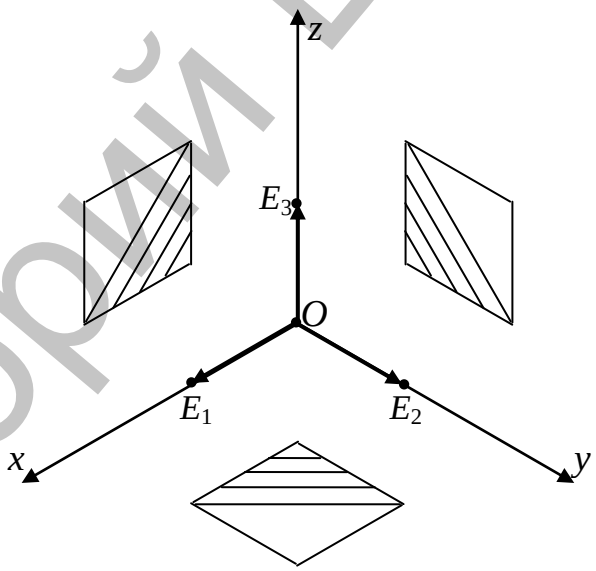


рис. 2.11

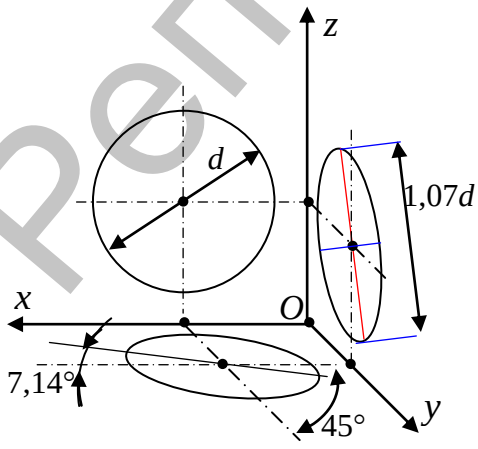


рис. 2.12

Изображение окружностей, расположенных в аксонометрических плоскостях, должно быть вписано в изображение квадрата (рис. 2.14). В первом, и в третьем видах проекции окружность в аксонометрической плоскости *Oxz* изображается в виде окружности такого же диаметра *d*, как оригинал. В случае кабинетной проекции большой и малый диаметры эллипса, изображающего окружность, в остальных аксонометрических плоскостях равны 1,07*d* и 0,33*d*; они повёрнуты по отношению к координатным осям на 7,14° и 45° соответственно.

Репозиторий ВГУ

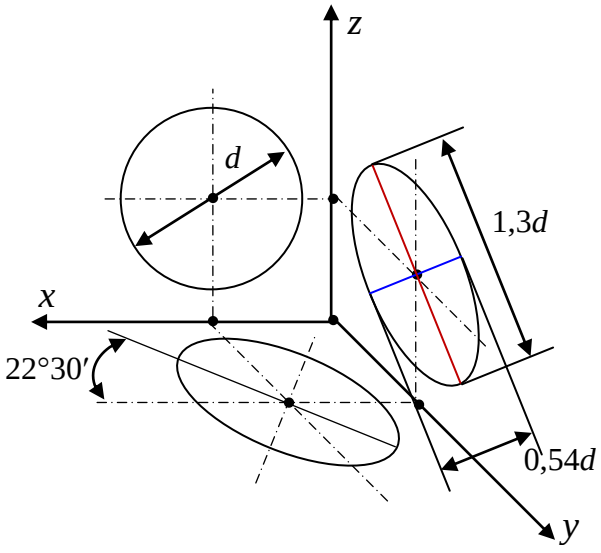


рис. 2.13

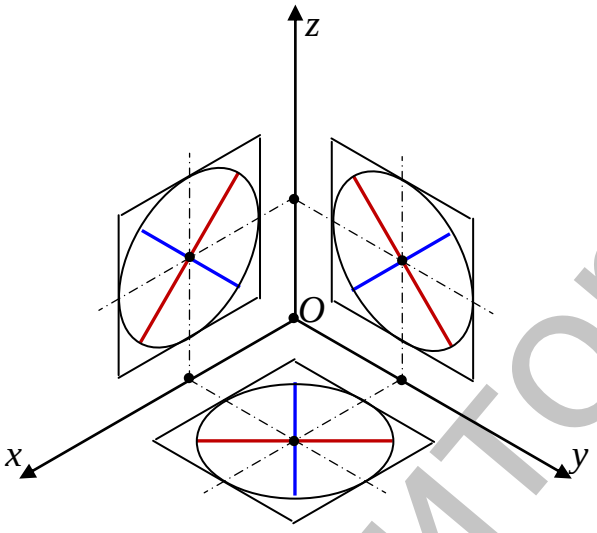


рис. 2.14

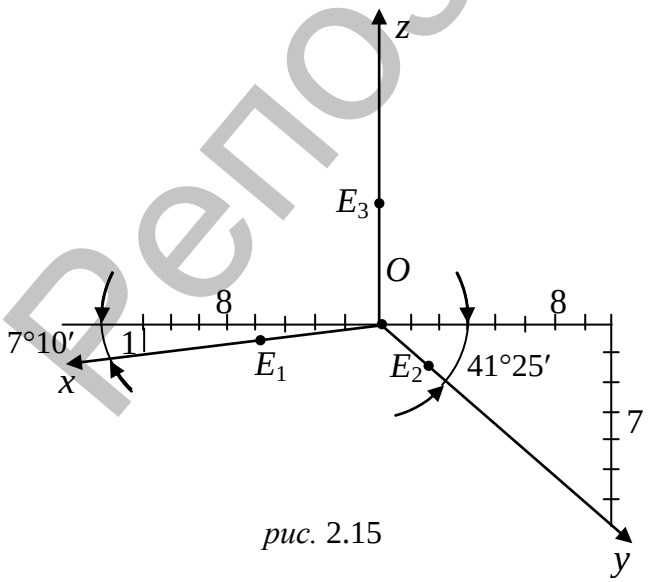


рис. 2.15

В случае кавальерной проекции оба главных диаметра эллипса в аксонометрических плоскостях *Oxy* и *Oyz* повёрнуты на 22°30′ по отношению к координатным осям (на четверть прямого угла), и их размер показан на рисунке 2.13.

В ортогональной изометрической проекции главные диаметры эллипсов образуют углы 30° и 60° с координатными осями. Их размеры равны $1{,}22d$ и $0{,}71d$, где d – диаметр оригинала.

На реальном чертеже, выполняемом без помощи компьютера, вместо эллипсов чертятся с помощью циркуля овалы, состоящие из нескольких дуг окружности.

Наиболее реалистичное изображение получается в прямоугольной диметрической проекция (рис.2.15). Это наиболее сложный случай. Здесь коэффициенты искажения имеют следующие значения:

$$u = w = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94,\ w = \frac{u}{2} \approx 0{,}47.$$

По отношению к горизонтальной линии оси и повёрнуты соответственно на 7°10′ и на 41°25′. Построить эти углы можно, зная что с большой точностью

$$\operatorname{tg} 7°10' \approx \frac{1}{8},\ \operatorname{tg} 41°25' \approx \frac{7}{8}.$$

Если уже построены оси *Ox* и *Oz*, то *Oy* можно построить, зная, что её продолжение является биссектрисой угла *xOz*.

Репозиторий ВГУ

На рисунках 2.13 и 2.14 дано изображение усечённого цилиндра на эпюре и в ортогональной изометрической проекции

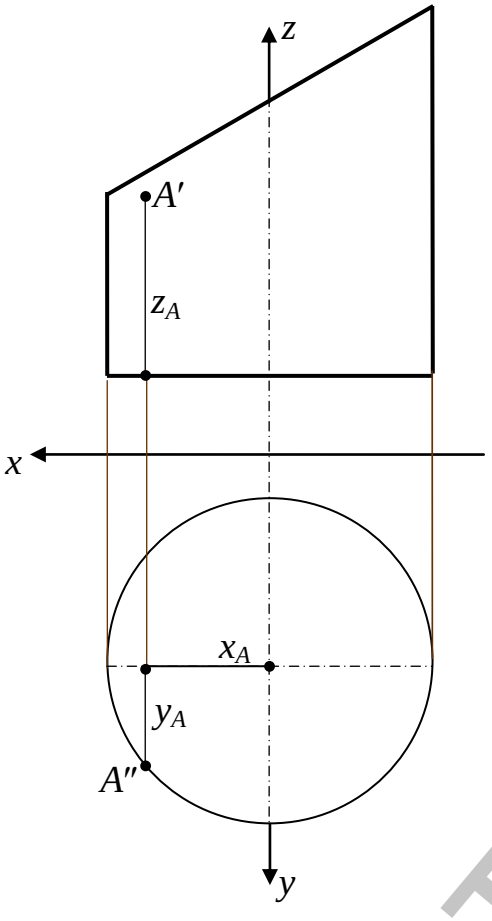


*рис.*2.16а

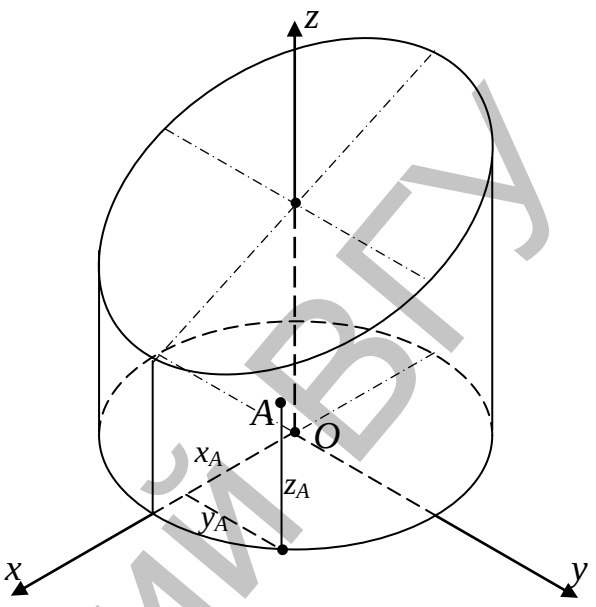


рис. 2.16б

***Задача* 1.** Дано изображение точки (A', A'') на эпюре. Построить её изображение в ортогональной изометрической проекции.

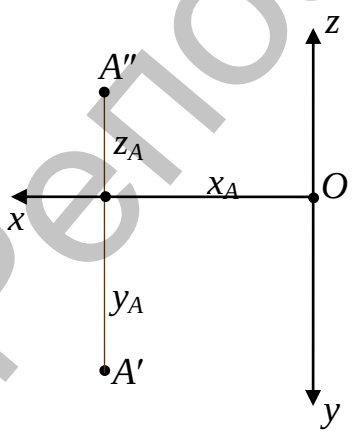


*рис.*2.17а

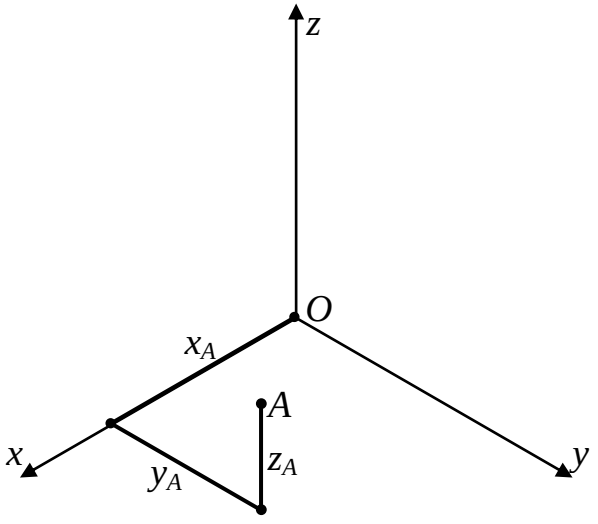


рис. 2.17б

Репозиторий БГУ

Решение задачи показано на рисунках 2.14а и 2.14б. Линия, которую мы построили называется координатной ломаной.

***Задача* 2.** Построить изображение правильной шестиугольной призмы в ортогональной изометрической проекции, если её основание находится в плоскости *Oxy*.

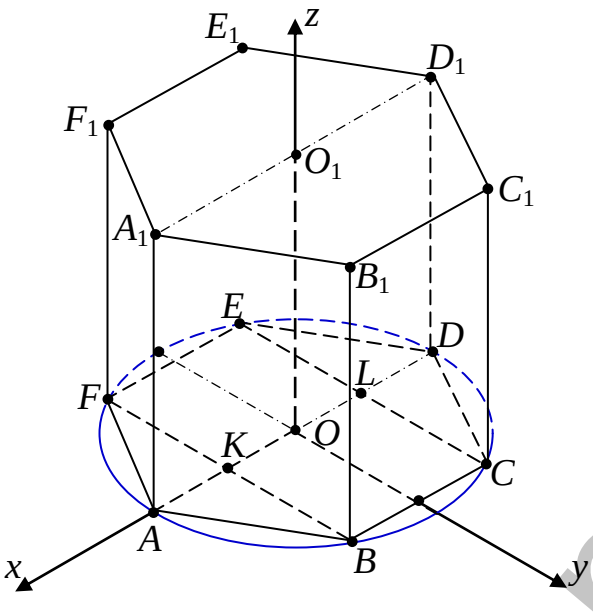


рис. 2.18

Решение. Будем исходить из того, что изображение строится не вручную, а с помощью компьютера, и, тем самым, построение эллипса с нужными пропорциями не представляет труда. Строим окружность и изменяем её ширину и длину с коэффициентами 1,22*d* и 0,71*d*. Продлевая аксонометрические оси, строим сопряжённые диаметры эллипса. Пусть *AD* – диаметр, лежащий на оси *Ox*. Строим середины *K* и *L* отрезков *AO* и *OD*. Gводим через них хорды *BF* и *CE*. *ABCDEF* – изображение правильного шестиугольника.

Дальнейшие действия по построению призмы очевидны. В завершение следует часть линий сделать штриховыми.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Построить изображение куба в кабинетной и кавальерной проекциях.

1.2. Построить изображение правильной четырёхугольной пирамиды в ортогональной изометрической проекции, если её высота равна стороне основания.

2.1. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды в ортогональной изометрической проекции, если её высота равна 100 мм, а сторона основания равна 60 мм.

2.2. Построить изображение правильной треугольной усечённой пирамиды в ортогональной изометрической проекции, если её высота равна 80 мм, а радиусы окружностей, описанных вокруг оснований равны 60 мм и 120 мм.

3.1. 3.2. Построить изображение детали в аксонометрической проекции по её ортогональному чертежу (рис. 2.19, 2.20).

Репозиторий ВГУ

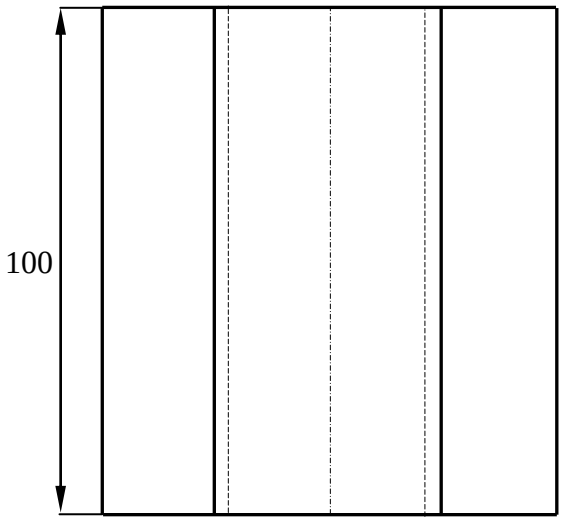
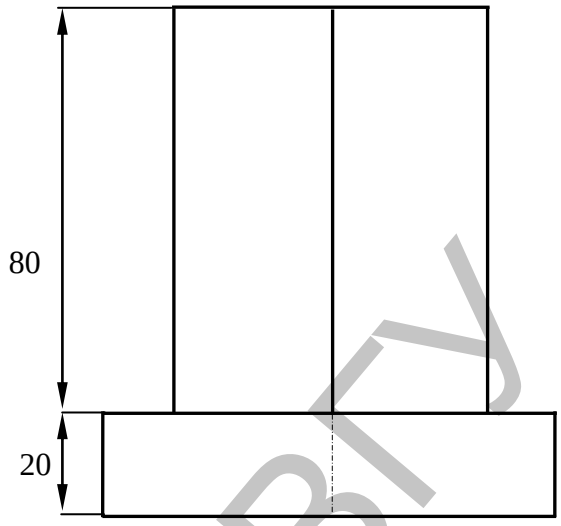
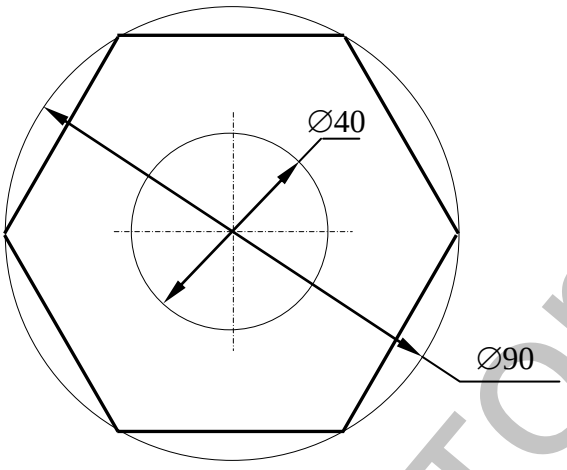


рис.*2.19*





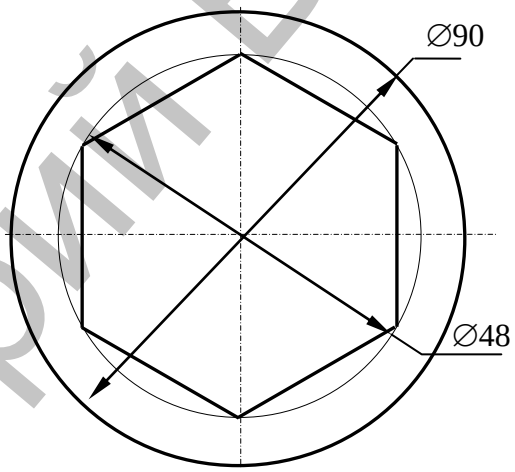


рис.*2.20*

Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Какие виды аксонометрических проекций вы знаете?
2. Под каким углом расположены оси в изометрии?
3. Какие приняты коэффициенты искажения по осям *X*, *Y*, *Z* для построения изометрической проекции?
4. Какую фигуру представляет изометрическая проекция окружности?
5. Как расположена большая ось эллипса для окружности, принадлежащей профильной плоскости проекций?
6. Какие приняты коэффициенты искажения по осям X, Y, Z для построения диметрической проекции?
7. Под какими углами расположены оси в диметрии?
8. Какой фигурой будет являться диметрическая проекция квадрата?
9. Как построить диметрическую проекцию окружности, расположенной во фронтальной плоскости проекций?
10. Основные правила нанесения штриховки в аксонометрических проекциях.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Мы уже видели, что многие задачи на прямые и плоскости решаются значительно проще, если рассматриваемые прямые и плоскости занимают частное положение. Перейти от общего положения фигуры к частному позволяют два способа:

а) изменение положения фигуры;

б) введение новых плоскостей проекций, по отношению к которым фигуры имеют частное положение.

§ 1. *Замена плоскостей. Преобразование прямой общего положения в прямую частного положения*

Этот метод заключается в следующем. Мы плоскостям проекций π_1 и π_2 добавляем новые плоскости, как правило, перпендикулярные одной из старых. На рисунке 3.1 выбрана плоскость $\pi_4 \perp \pi_1$ и построена новая проекция точки A на новую плоскость, которую мы обозначили A^{IV}. Для получения плоского чертежа плоскость π_4 совмещается с π_1 вращением. Горизонтальная прекция A' остаётся прежней, а фронтальная будет новой – это A^{IV}. Точки A'' и A^{IV} имеют одинаковую координату z_A, что позволяет легко построить A^{IV}.

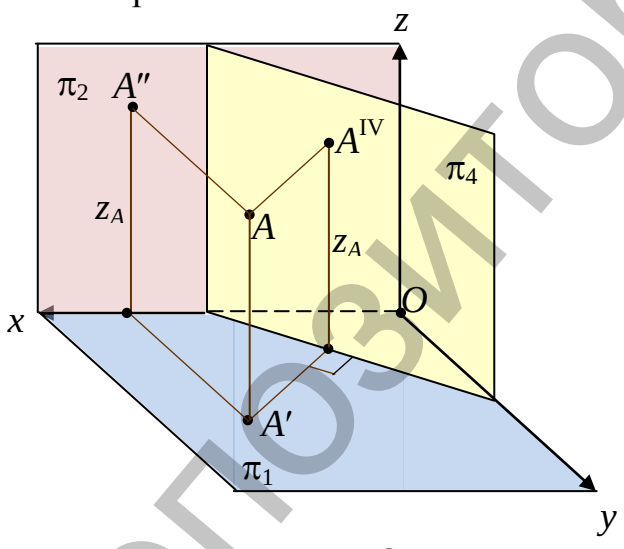


*рис.*3.1а

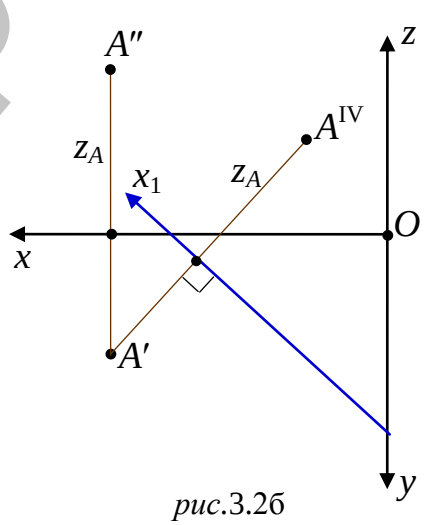


*рис.*3.2б

Точно также можно заменить горизонтальную плоскость проекций новой плоскостью.

***Задача* 1.** Преобразовать прямую общего положения AB в прямую уровня.

Решение. Введём новую плоскость проекций параллельно какой-либо проекции прямой AB. Тогда новая проекция получается параллельна самой прямой и

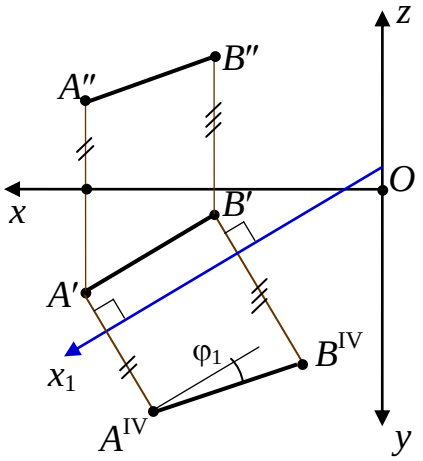


*рис.*3.3

Репозиторий ВГУ

проекция $A^{IV}B^{IV}$ имеет длину равную длине отрезка AB. На рисунке 3.3 мы заменили фронтальную плоскость проекций; горизонтальная проекция $A'B'$ отрезка AB остаётся прежней, а фронтальная $A''B''$ заменяется на $A^{IV}B^{IV}$. На рисунке 3.4 мы заменили горизонтальную проекцию $A'B'$ на новую $A^{V}B^{V}$.

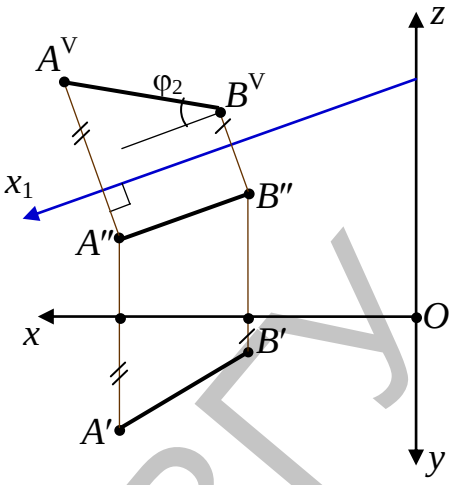


*рис.*3.4

***Задача* 2.** Преобразовать данную на чертеже прямую общего положения AB в проецирующую прямую.

Решение. Плоскость перпендикулярная прямой общего положения не будет перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. Поэтому для преобразования прямой AB в проецирующее положение требуется двойная замена плоскостей. Сначала мы совершаем замену плоскостей, как рисунке 3.3, превращая данную прямую в параллельную фронтальной плоскости π_4. Затем мы вводим новую горизонтальную плоскость π_5 перпендикулярную нашей прямой, и она также будет перпендикулярна плоскости π_4. Мы получили новую систему плоскостей π_4/π_5, в которой наша прямая будет горизонтально-проецирующей.

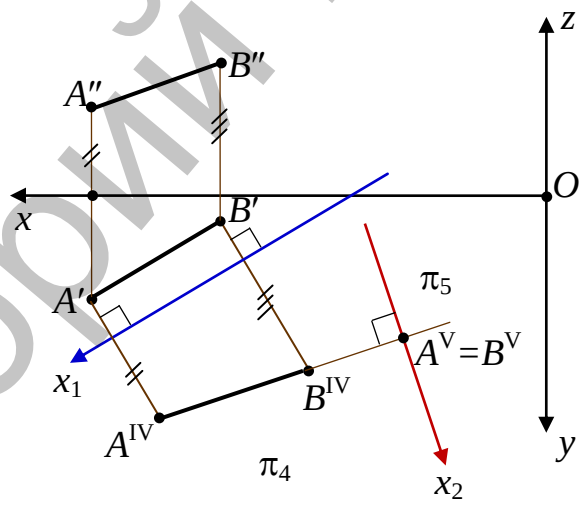


*рис.*3.5

§ 2. *Преобразование плоскости общего положения в плоскость частного положения*

Для того чтобы построить плоскость перпендикулярную данной плоскости α, мы можем в плоскости α выбрать любую прямую a и построить плоскость перпендикулярную a.

***Задача* 1.** Плоскость общего положения α задана треугольником (рис.3.6). Преобразовать её в проецирующее положение.

Решение. Проведём в плоскости α горизонталь (h', h'') и выберем новую фронтальную плоскость π_4 перпендикулярно этой горизонтали. Тогда она будет перпендикулярна α.

Репозиторий ВГУ

***Задача* 2.** Плоскость общего положения α задана треугольником (рис.3.7). Преобразовать её в плоскость уровня.

Решение. Плоскость параллельная α не будет параллельна плоскостям проекций. Поэтому совершаем двойную замену плоскостей проекций. Первое действие совершаем как в задаче 3. Затем мы оставляем фронтальной плоскость π_4 и совершаем замену горизонтальной плоскости π_1 на π_5.

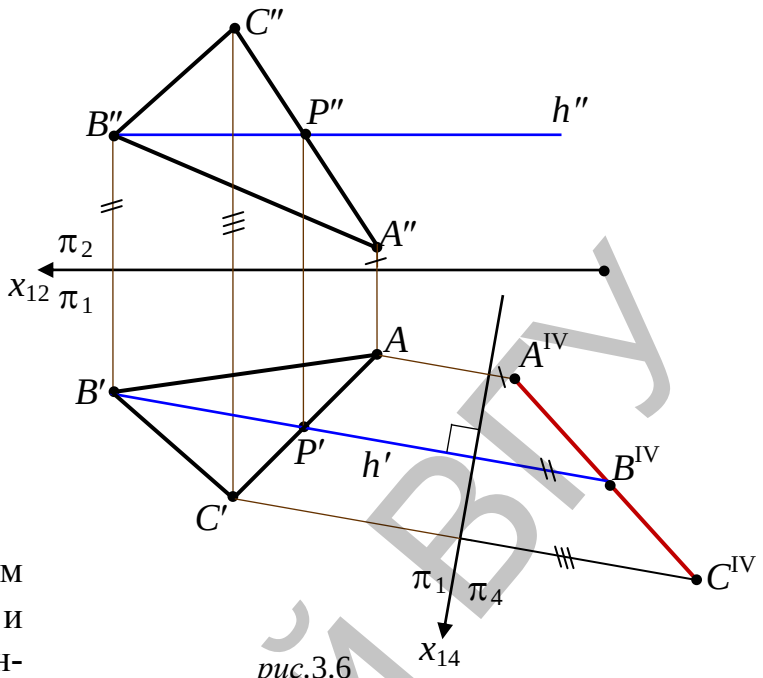


*рис.*3.6

Плоскость π_5 мы выбираем параллельно плоскости ΔABC, а значит, новая ось на чертеже будет параллельна прямой $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$. Новая горизонтальная проекция $A^{V}B^{V}C^{V}$ показывает истинные размеры ΔABC.

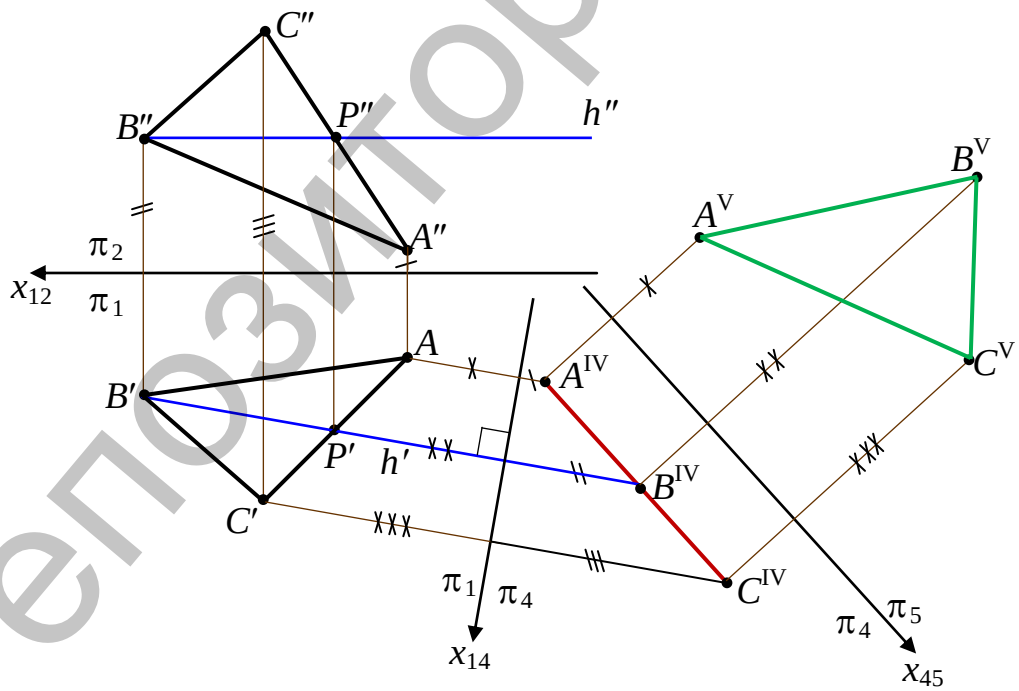


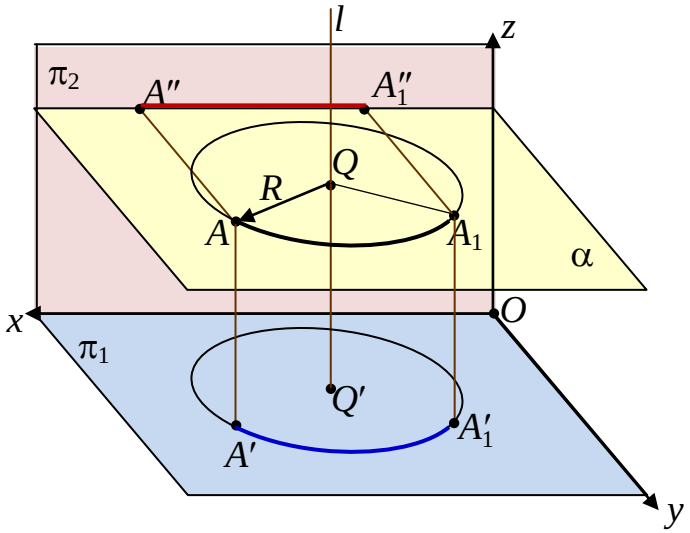
*рис.*3.7

§ 3. *Способ вращения*

Этот способ не предусматривает замену плоскостей проекций. Вместо этого мы совершаем вращение элементов чертежа вокруг некоторой фиксированной оси l. Плоскость α перпендикулярная оси переходит сама в себя. Каждая точка плоскости α вращается в по окружности ω, центр

Репозиторий ВГУ

которой есть точка $Q = l \cap \alpha$ (рис. 3.8а, б). Проекция траектории вращения на плоскость π_1 есть дуга окружности, а проекция на плоскость π_2 есть отрезок $A''A_1'' \| Ox$.



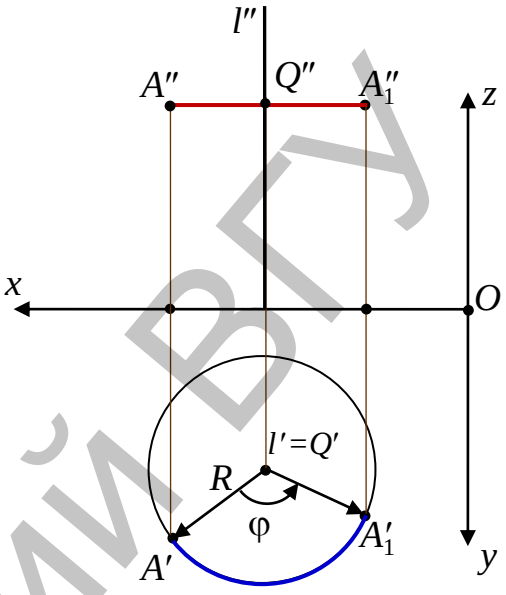


*рис.*3.8а

*рис.*3.8б

Для того чтобы построить результат поворота отрезка AB на угол φ мы строим результат поворота каждой из точек A, B. Каждая из точек вращается в своей плоскости и со своим радиусом поворота. На рисунке 3.9 мы совершили вращение отрезка вокруг вертикально-проецирующей прямой; для этого мы повернули на заданный угол горизонтальные проекции A' и B', а потом достроили вертикальные проекции концов нового отрезка.

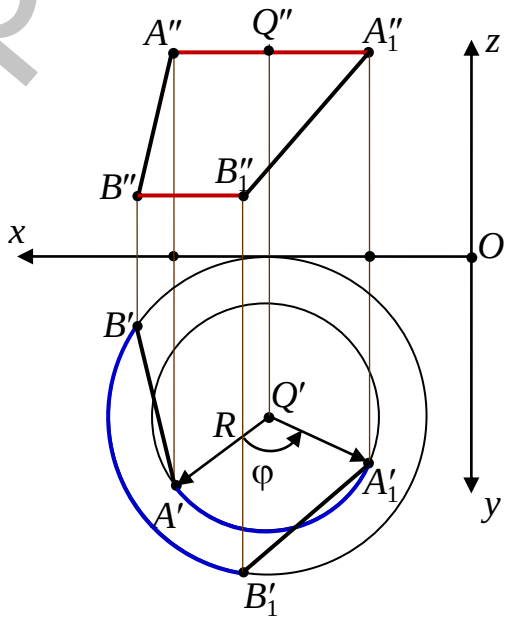


*рис.*3.9

Удобно совершать поворот вокруг оси, проходящей через один из концов отрезка. Тогда эта точка остаётся на месте. На рисунке 3.10 горизонтально-проецирующая ось l проходит через точку A. Мы поворачиваем отрезок AB вокруг l так, чтобы он стал параллелен плоскости π_2. В этом случае новый отрезок A_1B_1 проецируется в равный ему отрезок $A_1''B_1''$, и мы можем узнать натуральную величину отрезка AB.

На рисунке 3.11 фронтально-проецирующая ось l проходит через точку A. Мы поворачиваем отрезок AB вокруг l так, чтобы он стал па-

Репозиторий ВГУ

раллелен плоскости π_1. Отрезок $A'_1B'_1$ (горизонтальная проекция нового отрезка) представляет собой натуральную величину отрезка AB.

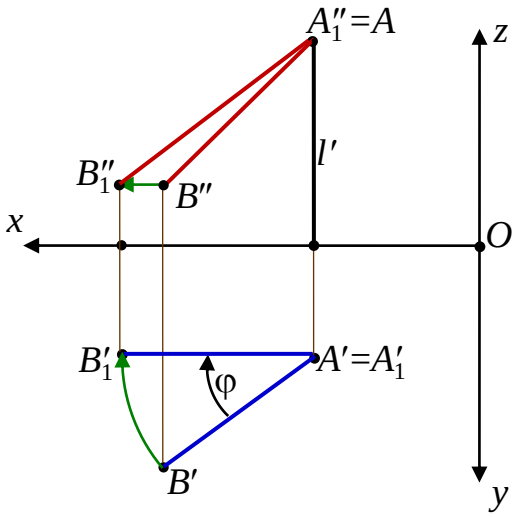


*рис.*3.10

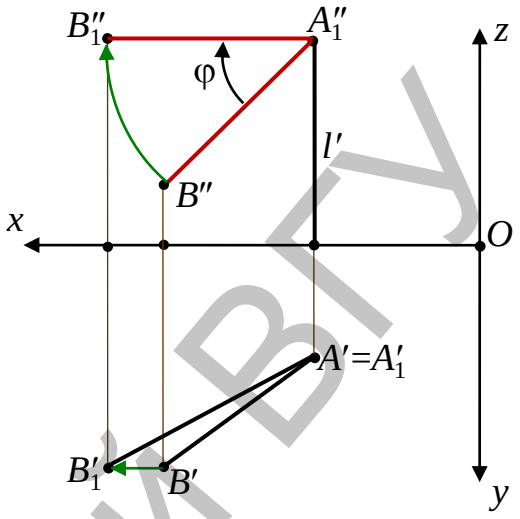


*рис.*3.11

Если плоскость задана треугольником, то, поворачивая каждую из сторон треугольника вокруг оси, мы получим поворот плоскости. Одна из проекций треугольника переходит в равную фигуру, а точки второй проекции смещаются по линиям параллельным Ox.

§ 4. *Плоскопараллельное перемещение*

Термин «плоскопараллельное перемещение» не означает то же самое, что «параллельный перенос». При таком перемещении все точки фигуры движутся в плоскостях параллельных одной из плоскостей проекций. На рисунке 3.12 показано плоскопараллельное перемещение отрезка AB, который переходит в отрезок A_1B_1. Точки и перемещаются в различных горизонтальных плоскостях α и β, при этом сохраняется длина отрезка и его угол наклона к плоскости π_1 (потому что треугольники BAB_o $B'A'B'_o$ равны). По той же причине длина проекции на горизонтальную плоскость остаётся неизменной.

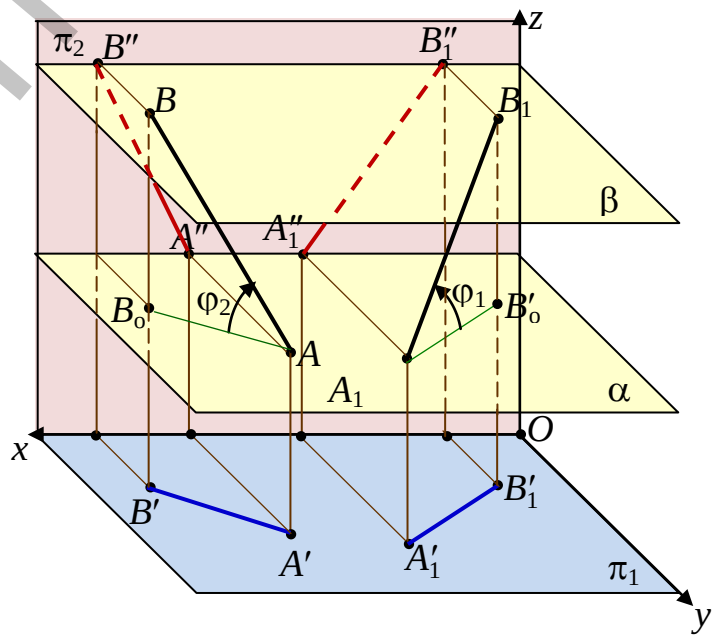


*рис.*3.12

Репозиторий ВГУ

С помощью плоскопараллельного перемещения мы можем переместить отрезок из общего положения в частное. На рисунке 3.13 мы переместили отрезок AB во фронтальное положение A_1B_1. В результате фронтальная проекция $A_1''B_1''$ равна самому отрезку AB, и мы можем узнать натуральную величину отрезка AB и угол его наклона к горизонтальной плоскости.

Поскольку теперь отрезок находится во фронтальной плоскости уровня, мы можем совершить его плоскопараллельное перемещение внутри этой плоскости и перевести его в горизонтально-проецирующее или профильно-проецирующее положение.

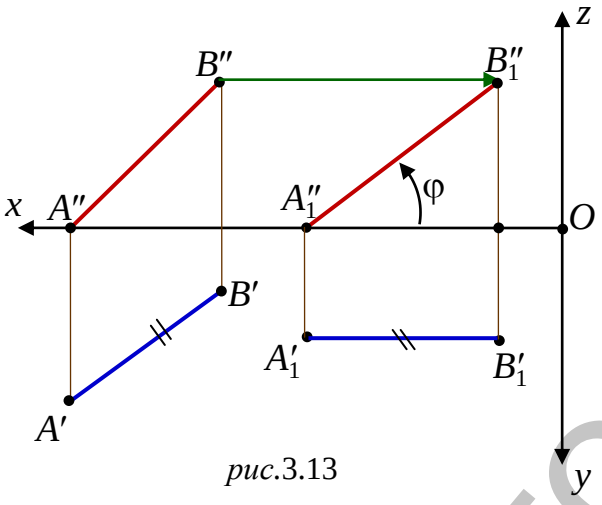


*рис.*3.13

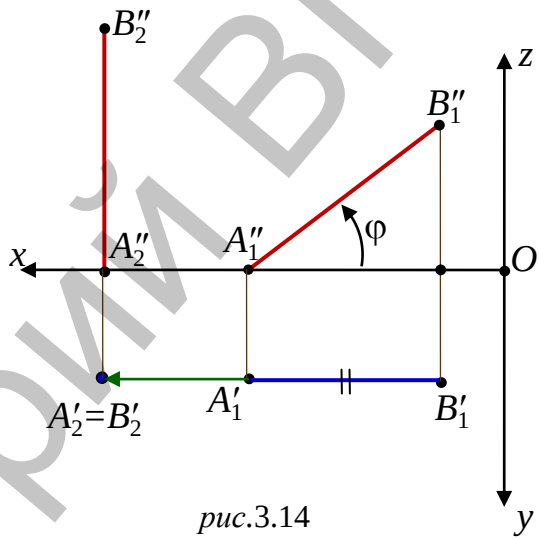


*рис.*3.14

На рисунке 3.14 мы перевели отрезок в горизонтально-проецирующее положение. Можно было совершить такое преобразование в виде поворота вокруг точки A.

На рисунке 3.15 мы преобразовываем плоскость общего положения, заданную треугольником ABC, в плоскость уровня. Для этого мы на первом этапе переводим её во фронтально-проецирующее положение. С этой

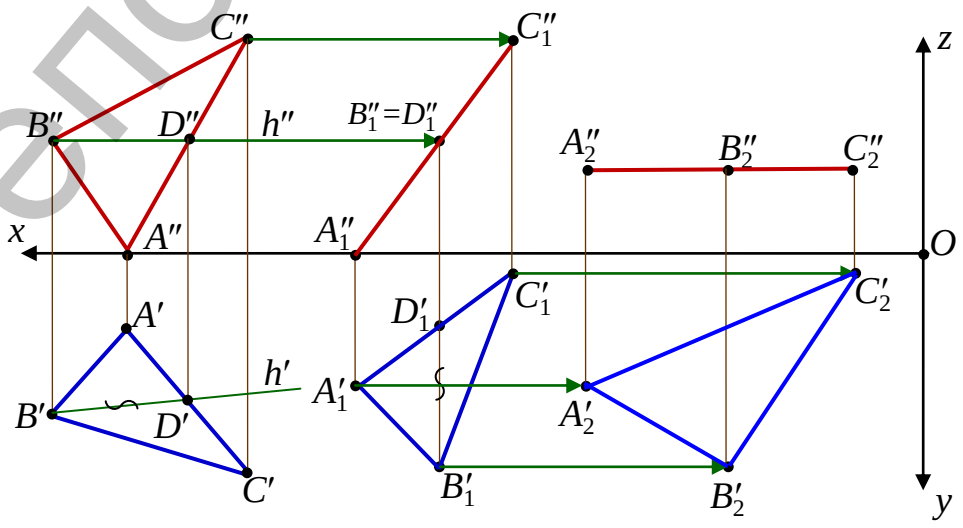


*рис.*3.15

Репозиторий ВГУ

мы выбираем горизонталь (h', h'') и переводим её во фронтально-проецирующее положение и достраиваем треугольник $A_1'B_1'C_1'$ равный треугольнику $A'B'C'$. На втором этапе каждая из вершин треугольника перемещается в своей плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций с тем, чтобы треугольник принял горизонтальное положение. В результате горизонтальная проекция $A_2'B_2'C_2'$ получится равной самому треугольнику.

§ 5. *Примеры решения задач*

Мы уже знаем, что узнать натуральные размеры плоской фигуры мы сможем, если переведём её в положение, при котором она находится в плоскости уровня. Сделать это можно так же с помощью поворота вокруг прямой уровня. Это разновидность плоскопараллельного перемещения

***Задача* 1.** Дан отрезок общего положения AB. Построить результат его поворота в горизонтально-проецирующей плоскости α вокруг точки A (рис. 3.16 а,б).

Решение. Проведём прямую уровня h перпендикулярную плоскости α; вращение происходит вокруг этой прямой. Точка B при вращении описывает окружность, проекция которой лежит на следе-проекции α' плоскости α. Результат поворота параллелен плоскости π_1, поэтому проекция $A'B_1'$ равна отрезку AB и равна радиусу поворота. На рисунке 3.16б показано, как найти радиус поворота, и тем самым, найти точку B_1'.

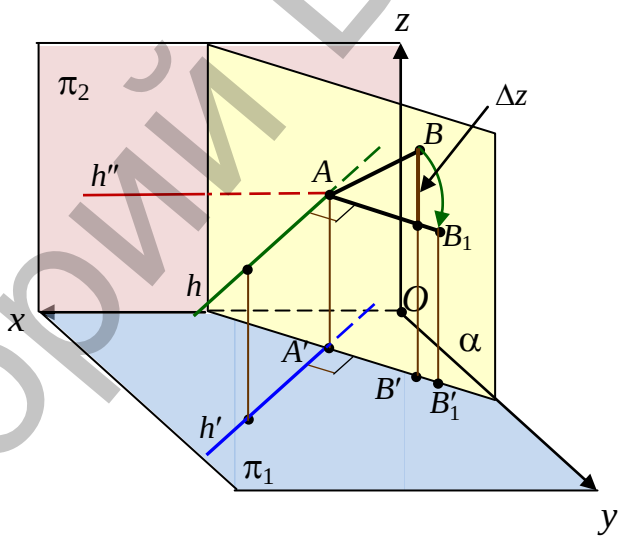


*рис.*3.16а

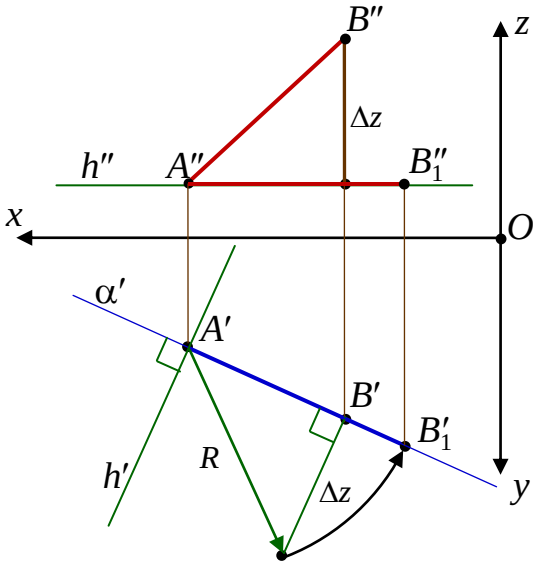


*рис.*3.16б

Если изначально даны точка B и ось h, вокруг которой следует совершить вращение, то мы сначала проводим перпендикуляр к оси и находим точку A. Дальнейшие действия повторяются.

Если мы хотим построить результат поворота многоугольника, то не обязательно строить результат поворота всех его вершин. Можно использовать тот факт, что соответственные стороны двух многоугольников (до поворота и после) сходятся в точке, лежащей на оси вращения. Мы разберём подобную задачу на лабораторных занятиях.

Репозиторий ВГУ

Задания для самостоятельного решения

1.1. Определить действительную величину отрезка *AB* способом замены плоскостей проекций (рис. 3.17).

1.2. Определить действительную величину отрезка *AB* способом вращения вокруг проецирующих осей (рис. 3.17).

2.1. Определить натуральную величину треугольника *ABC* частного положения способом вращения вокруг проецирующей оси (рис. 3.18).

2.2. Определить натуральную величину треугольника *ABC* общего положения способом плоско-параллельного перемещения (рис. 3.19).

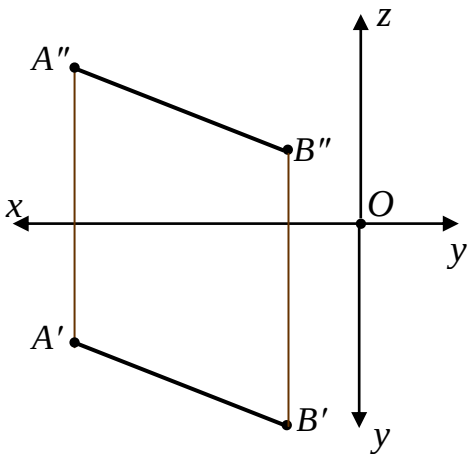


*рис.*3.17

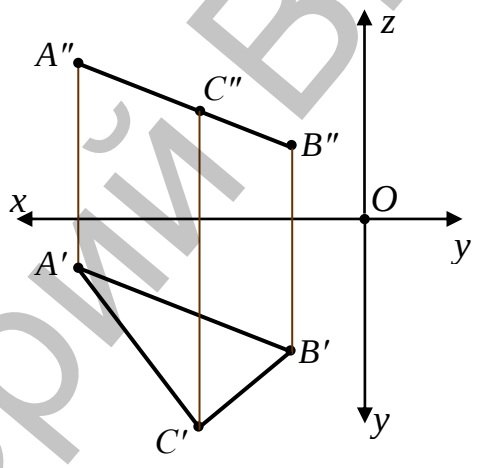


*рис.*3.18

3.1. Определить действительную величину треугольника *ABC* способом замены плоскостей проекций (рис.3.20).

3.2. Определить действительную величину треугольника *ABC* замены плоскостей проекций (рис.3.18).

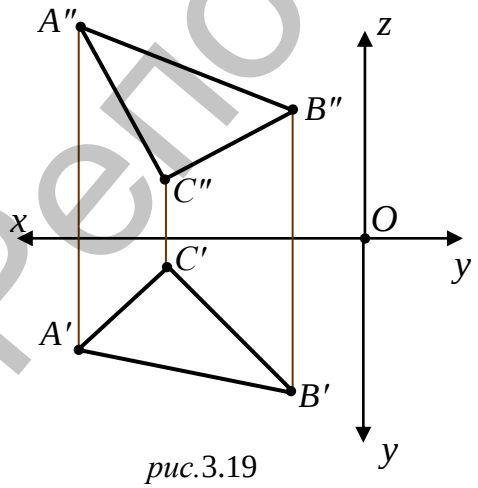


*рис.*3.19

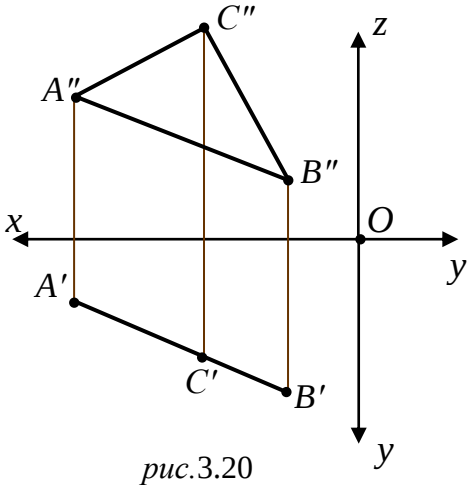


*рис.*3.20

Репозиторий ВГУ

Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Какие способы преобразования комплексного чертежа вы знаете?
2. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
3. В чем сущность способа плоско-параллельного перемещения?
4. Зачем осуществляют преобразование комплексного чертежа?
5. Чем отличаются способы преобразования комплексного чертежа?
6. Назовите четыре исходные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций?
7. Как преобразовать прямую общего положения в проецирующую?
8. Как способом замены плоскостей проекций определить углы наклона плоскости общего положения к плоскостям проекций?
9. Сколько раз необходимо произвести замену плоскостей проекций для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня?
10. Запишите алгоритм способа замены плоскостей проекций.

Репозиторий БГУ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ГЛАВА 1. ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ 4
§1. Параллельное проецирование 4
§2. Центральное проецирование 5
§3. Обратимость чертежа. Точка в системе нескольких плоскостей проекций 6
§4. Изображение прямой 8
§5. Следы прямой 12
§6. Определение натуральной величины отрезка и углов наклона прямой 13
§7. Относительное расположение двух прямых в пространстве 14
§8. Изображение плоскости на чертеже 15
§9. Задачи на прямую и плоскость 19
§10. Прямые особого положения в плоскости 22
§11. Взаимное расположение прямой и плоскости и двух плоскостей 23
§12. Перпендикулярность прямых и плоскостей 28
Задания для самостоятельного решения 30
Вопросы и упражнения для самоконтроля 32
ГЛАВА 2. АКСОНОМЕТРИЯ 34
§1. Изображение окружности и эллипса 34
§2. Аксонометрическое проецирование 35
Задания для самостоятельного решения 40
Вопросы и упражнения для самоконтроля 41
ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА 42
§1. Замена плоскостей. Преобразование прямой общего положения в прямую частного положения 42
§2. Преобразование плоскости общего положения в плоскость частного положения 43
§3. Способ вращения 44
§4. Плоскопараллельное перемещение 46
§5. Примеры решения задач 48
Задания для самостоятельного решения 49
Вопросы и упражнения для самоконтроля 50

Репозиторий ВГУ

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
ЛУЦЕЙКОВИЧ Валерий Иванович

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать 04.01.2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 4,22. Тираж 70 экз. Заказ 2.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.

Репозиторий ВГУ