МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА ДЛЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Хорошо известная формула Лейбница нахождения производных *n*-го порядка от произведения двух дифференцируемых функций того же порядка [1]:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

остается справедливой для так называемого оператора δ-дифференцирования [2]:

$$\delta = \left(x\frac{d}{dx} \right), \tag{1}$$

$$\delta^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta^{n-k}(f)\delta^k(g), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Материал и методы. Дробное интегродифференцирование Адамара является по сути дробной степенью оператора (1). Поэтому формула (2) допускает обобщение на дробные значения *n*. Для этого рассматривались [3] функции *h(t)*, определенные на отрезке [a, b], которые представимы в окрестности точки $x \in (a, b)$ в виде функционального ряда

$$h(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_k \left(\ln\frac{t}{x} \right)^k. \tag{3}$$

Выбор такого класса функций обусловлен тем, что их произведение также имеет представление вида (3), а дробная производная по Адамару представляется в виде ряда [3]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}h\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \delta^k h(x), \quad \alpha \in R, \quad x \in (a, b), \tag{4}$$

где $\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\cdot n!}$ – обобщенный биномиальный коэффициент, т.е. при натуральном $\alpha = m$ имеем $\binom{m}{n} = C_m^k = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

В связи с этим распространение формулы (2) на дробные значения *n* в классе функций (3) будет иметь вид [4]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f(t)g(t)\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_{a+}^{\alpha-k} f(x)\delta^k g(x), \quad \alpha \in R, \tag{5}$$

где $t, x \in [a, b], 0 < a < b < +\infty$.

Результаты и их обсуждение. В формуле (5) используются целые неотрицательные степени оператора (1). Однако степень оператора δ-дифференцирования может быть и дробной. В этом случае будет справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* определены на отрезке [a, b] и на интервале *(a, b)*, $0 < a < b < \infty$, имеют разложения вида (3)

Тогда справедлива формула

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f(t)g(t)\right)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{\alpha}{k+\beta} \left(D_{a+}^{\alpha-\beta-k} f(t)\right)(x)\left(D_{a+}^{\beta+k} g(t)\right)(x), \quad .(6)$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}, \ \alpha, \beta \in R \text{ и } \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots \text{ при нецелом } \beta.$$

Доказательство утверждения получается, если (5) переписать в виде

$$\left(D_{a+}^{\beta} f(t)g(t)\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} \left(D_{a+}^{\beta-k} g\right)(x)\left(\delta^k f\right)(x), \quad (7)$$

а затем применить к обеим частям последнего равенства оператор $D_{a+}^{\alpha-\beta}$, воспользовавшись при этом так называемым полугрупповым свойством этого оператора и возможностью почленного дробного дифференцирования по Адамару ряда из правой части (7).

Заключение. Тем самым получена наиболее общая форма правила Лейбница для дробного интегродифференцирования Адамара.

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 16–17 марта 2011 г. – Витебск, 2011.– Т. 1. С. 71-73.
3. Шлапаков С.А. Дробное дифференцирование Адамара функций, представимых рядами / С.А. Шлапаков // Материалы международной научно-практической Интернет-конференции, посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Воробьева Н.Т. “Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам”, 21–22 июня 2011 г. – Витебск, 2011. – С. 72-73.
4. Шлапаков, С.А. Обобщенное правило Лейбница / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: Материалы XVII(64) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 14–15 марта 2012 г.– Витебск,.2012. – с. 28–30.