Теорема 1. *Пусть* F *–* τ*-замкнутая* n*-кратно насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_n^{\tau}\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Теорема 2. *Пусть* F *–* τ*-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_{\infty}^{\tau}\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Если $\tau(G)=\{G\}$ – тривиальный подгрупповой функтор τ, то получим

Следствие 3 [5]. *Пусть* F *–* n*-кратно насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_n\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Следствие 4 [5]. *Пусть* F *– тотально насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_{\infty}\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Список литературы

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math. / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. Vol. 4. – 891 p.
3. Скиба, А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Минск, 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.
4. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : Труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
5. Воробьев, Н.Н. О кратно насыщенных формациях со стоуновой решеткой подформаций / Н.Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 3. – С. 23–27.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ МНОЖЕСТВА ФИТТИНГА И КЛАССА ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Цель работы – описание построения множеств Фиттинга посредством операции умножения множества Фиттинга и класса Фиттинга.

Класс групп F называют классом Фиттинга, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathsf{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathsf{F}$;
2) если $G=N_1N_2$, где $N_i \in \mathsf{F}$ и $N_i \lhd G$ $(i \in \{1,2\})$, то $G \in \mathsf{F}$.

В работе [1] аналог понятия класса Фиттинга был определен для группы G следующим образом. Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое множество подгрупп группы G. Тогда $\mathcal{X}$ называют множеством Фиттинга, если $\mathcal{X}$ замкнуто относительно нормальных подгрупп, произведений нормальных $\mathcal{X}$-подгрупп и сопряжений в G.

Из условия 2) определения класса Фиттинга следует, что для любой группы G существует наибольшая нормальная F-подгруппа группы G, которую называют F-радикалом группы G и обозначают символом G_{F}. Аналогично, определяется подгруппа $G_{\mathcal{X}}$ – $\mathcal{X}$-радикал для множества Фиттинга $\mathcal{X}$. Если F и H классы Фиттинга, то их произведение класс групп $\mathsf{FH}=(G:G/G_{\mathsf{F}} \in \mathsf{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга. В связи с этим актуальна задача определения операции умножения для множеств Фиттинга. В этом направлении исследований проблема состоит в том, что определяя такую операцию аналогично как и для классов Фиттинга, мы в общем случае не получаем, что произведение множеств Фиттинга является множеством Фиттинга. Этого недостатка удается избежать, если рассматривать произведение множества Фиттинга и класса Фиттинга.

Определение. Пусть $\mathcal{X}$ – множество Фиттинга группы G и F – класс Фиттинга. Тогда произведением $\mathcal{X}$ и F назовем множество $\mathcal{X} \circ \mathsf{F} = \{H \leq G: H/H_{\mathcal{X}} \in \mathsf{F}\}$.

Теорема. Произведение $\mathcal{X} \circ \mathsf{F}$ множества Фиттинга $\mathcal{X}$ группы G и класса Фиттинга F является множеством Фиттинга группы G.

В заключение сформируем проблемы, связанные с операцией «$\circ$».

Проблема 1. Какова группа G, для которой существуют $\mathcal{X}$-инъекторы в G любые два из них сопряжены в G ?

Проблема 2. Определить локальные множества Фиттинга и изучить свойства, аналогичные свойствам локальных классов Фиттинга.

Список литературы

1. Anderson W. Injectors in finite solvable groups // J. Algeba. 1975. V. 36. P. 333-338.

О СВОЙСТВЕ НОРМАЛЬНОСТИ В КЛАССАХ ФИШЕРА

С.Н. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Основная цель настоящей работы – изучение свойств классов Фиттинга, вложимых нормально в класс Фишера. Напомним, что классом Фитинга называют класс групп F, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F-подгрупп. Класс Фиттинга F называют классом Фишера, если F замкнут относительно подгрупп вида PN, где P – силовская p-подгруппа группы $G \in \mathsf{F}$ и N – нормальная подгруппа группы G. Класс Фиттинга F называют нормальным в классе групп X, или X-нормальным, если $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{X}$ и для любой группы $G \in \mathsf{X}$ ее F-радикал является наибольшей из подгрупп группы G, принадлежащих F. Если $\mathsf{X}=\mathsf{S}$ классу Фиттинга всех конечных разрешимых групп, то класс Фиттинга F, нормальный в S называют просто нормальным классом Фиттинга. В теории конечных разрешимых групп известна теорема Блессеноля-Гашюца [1] о том, что пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фитттинга является снова нормальным неединичным классом Фиттинга. В связи с этим актуальна задача расширения теоремы на случай X-нормальных классов Фиттинга. Ее решение для случая, когда X – класс Фишера, является основным результатом настоящей работы.

Пусть π – некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел P. Класс Фиттинга F называют π-насыщенным, если $\mathsf{F}\mathsf{E}_{\pi'}=\mathsf{F}$, где $\mathsf{E}_{\pi'}$ – класс всех конечных π'-групп и $\pi'=P/\pi$. Доказана

Теорема. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq P$ и $\{\mathsf{F}_i \mid i \in I\}$ – множество π-насыщенных классов Фиттинга нормальных в классе Фишера X. Тогда если каждая группа из X является π-разрешимой, то класс $\mathsf{F}=\cap_{i \in I}\mathsf{F}_i$ – π-насыщенный X-нормальный класс Фиттинга.