О РЕШЕТКАХ КРАТНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ С УСЛОВИЕМ ДОПОЛНЯЕМОСТИ

Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать стандартную терминологию из [1, 2].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – подгрупповой функтор (в терминологии А.Н. Скибы) [1], если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi\colon A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ-*замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathsf{F}$ для любой ее группы G из F [1].

В дальнейшем через N, N_p, (1) обозначают соответственно класс всех нильпотентных групп, класс всех p-групп и класс всех единичных групп. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathsf{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп X, $F_p(G)$ – наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f\colon \Pi \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (*)$$

Следуя [1], сопоставим функции f вида $(*)$ класс групп

$$LF(f) = (G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)).$$

Если формация F такова, что $\mathsf{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида $(*)$, то F называется *насыщенной* формацией с *локальным спутником* f [1].

Всякая формация считается 0-*кратно насыщенной*. При $n \geq 1$ формация F называется n-*кратно насыщенной* [3], если $\mathsf{F} = LF(f)$, где все непустые значения локального спутника f являются $(n-1)$-кратно насыщенными формациями. Если формация F n-кратно насыщенна для всех натуральных n, то F называется *тотально насыщенной*.

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно насыщенной формации F через $L_n^{\tau}(\mathsf{F})$ обозначают решетку всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций формации F. Если же τ-замкнутая формация F тотально насыщена, то через $L_{\infty}^{\tau}(\mathsf{F})$ обозначают решетку всех ее τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций.

Пусть X – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих X, обозначают через $\operatorname{form}\mathsf{X}$ (см. [1]).

Напомним, что подформация M формации F называется *дополняемой* в F [4], если M дополняема в решетке всех подформаций формации F, т. е. если в F имеется такая подформация H (*дополнение* к M в F), что

$$\mathsf{F} = \operatorname{form}(\mathsf{M} \cup \mathsf{H}); \qquad \mathsf{M} \cap \mathsf{H} = (1).$$

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* F – τ-*замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_n^{\tau}\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Теорема 2. *Пусть* F – τ-*замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_{\infty}^{\tau}\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Если $\tau(G)=\{G\}$ – тривиальный подгрупповой функтор τ, то получим

Следствие 3 [5]. *Пусть* F – *n-кратно насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_n\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Следствие 4 [5]. *Пусть* F – *тотально насыщенная формация. Тогда если формация* N_p *дополняема в решетке* $L_{\infty}\left(\mathsf{F}\right)$ *для каждого* $p \in \pi(\mathsf{F})$, *то* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{N}$.

Список литературы

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math. / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. Vol. 4. – 891 p.
3. Скиба, А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Минск, 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.
4. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : Труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
5. Воробьев, Н.Н. О кратно насыщенных формациях со стоуновой решеткой подформаций / Н.Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 3. – С. 23–27.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ МНОЖЕСТВА ФИТТИНГА И КЛАССА ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьев

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Цель работы – описание построения множеств Фиттинга посредством операции умножения множества Фиттинга и класса Фиттинга.

Класс групп F называют классом Фиттинга, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathsf{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathsf{F}$;
2) если $G=N_1N_2$, где $N_i \in \mathsf{F}$ и $N_i \lhd G$ ($i \in \{1,2\}$), то $G \in \mathsf{F}$.

В работе [1] аналог понятия класса Фиттинга был определен для группы G следующим образом. Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое множество подгрупп группы G. Тогда $\mathcal{X}$ называют множеством Фиттинга, если $\mathcal{X}$ замкнуто относительно нормальных подгрупп, произведений нормальных $\mathcal{X}$-подгрупп и сопряжений в G.

Из условия 2) определения класса Фиттинга следует, что для любой группы G существует наибольшая нормальная F-подгруппа группы G, которую называют F-радикалом группы G и обозначают символом G_{F}. Аналогично, определяется подгруппа $G_{\mathcal{X}}$ – $\mathcal{X}$-радикал для множества Фиттинга $\mathcal{X}$. Если F и H классы Фиттинга, то их произведение класс групп $\mathsf{FH}=(G:G/\ G_{\mathsf{F}} \in \mathsf{H})$. Хорошо известно, что