УДК 512.542.6

Об инъекторах класса *p*-нильпотентных конечных групп

В.И. Гойко
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого»

А. Балестер-Болиншес и Л.М. Эзкверро доказали, что для произвольного класса Фиттинга в произвольной конечной группе инъекторов не существует. В связи с этим обстоятельством возникла проблема поиска инъекторов в неразрешимых группах для специальных классов групп.

Цель статьи − исследовать основные свойства F*-инъекторов (сопряженность, критерий существования) в случае, когда в конечной группе существует* F*-инъектор для класса всех конечных p-нильпотентных групп* F *(p – фиксированное простое число).*

Материал и методы. *Объект исследования – инъекторы в неразрешимых конечных группах. Использованы методы исследования конечных групп, классов Фиттинга и формаций.*

Результаты и их обсуждение. *В работе получены новые результаты: исследованы основные свойства инъекторов (сопряженность, критерий существования) в случае, когда в конечной группе существует* F*-инъектор для класса всех конечных p-нильпотентных групп* F .

Заключение. *Доказана сопряженность* F*-инъекторов и найден критерий существования* F*-инъекторов в конечных группах в случае, когда в конечной группе существует* F*-инъектор для класса всех конечных p-нильпотентных групп F . Результаты статьи могут быть использованы для поиска инъекторов в неразрешимых группах для других специальных классов групп.*

Ключевые слова: *группа, подгруппа, класс групп, класс Фиттинга, формация, инъектор, сопряженность*.

About the Injectors of the Class of *p*-Nilpotent Finite Groups

U.I. Hoika
Educational Establishment «Gomel State Technical P. Sukhov University»

A. Bolister-Bolinshes and L.M. Ezquerro proved that the injectors in arbitrary finite groups for arbitrary class of Fitting don't exist. In connection with this circumstance the problem of finding the injectors in the unsolvable groups for the special classes of groups arises.

The purpose of the paper is to investigate basic properties of injectors (the conjugacy, the criterion of existence) for the chance when in finite groups F*-injectors exist for the class of all finite p-nilpotent* F*-group (p is a fixed simple number).*

Material and methods. *The object of the investigation of this paper is injectors in the unsolvable finite groups. The methods of investigation of finite groups, Fitting classes and formations are used.*

Findings and their discussion. *In this paper the following findings are obtaned: the basic properties of injectors in finite groups for the class of all finite p-nilpotent* F *groups are investigated.*

Conclusion. *The conjugacy of* F*-injectors is proven and criterion of the existence of* F*-injectors in finite groups is found when in a finite group there is an* F*-injector for the class of all finite p-nilpotent* F*-groups. The findings can be used for the finding injectors in unsolvable groups for other special classes of groups.*

Key words: *group, subgroup, class of groups, Fitting class, formation, injector, conjugation.*

В работе [1] F-инъекторы были построены в конечных разрешимых группах для разрешимого класса Фиттинга F. Поскольку инъекторы представляют собой обобщение одного из основополагающих результатов теории конечных групп – теорем Л. Силова и Ф. Холла, – то, естественно, что к инъекторам возник огромный интерес. В [2] доказано, что в произвольных конечных группах для произвольного класса Фиттинга инъекторов не существует. Однако было замечено, что в частично разрешимых группах инъекторы существуют и сопряжены [3], [4]. Кроме того, в [5] доказано существование квазинильпотентных инъекторов в произвольной конечной группе. В дальнейшем появилось большое количество работ, посвященных этому направлению (см., например, [6–10]).

В данной статье исследованы основные свойства F-инъекторов в произвольной конечной группе G (сопряженность, критерий существования) в том случае, когда F-инъектор в группе G существует, где F – это класс всех конечных p-нильпотентных групп (p – фиксированное простое число). Рассматриваются только конечные группы, и все классы групп берутся из класса всех конечных групп. *Класс Фиттинга* F − это такой непустой класс конечных групп, для которого выполняются условия: a) если $G \in \mathsf{F}$ и N есть нормальная в G подгруппа, то $N \in \mathsf{F}$; b) если M и N – нормальные подгруппы в группе G и $M \in \mathsf{F}$, $N \in \mathsf{F}$, то $MN \in \mathsf{F}$. Подгруппа V группы G называется F-*инъектором* [1], если для любой субнормальной подгруппы H группы G пересечение $H \cap V \in \mathsf{F}$ и является F-максимальной подгруппой в H. Подгруппа M группы G называется F-*максимальной подгруппой* в G, если $M \in \mathsf{F}$ и из условий $M \subseteq L \subseteq G$, $L \in \mathsf{F}$ всегда следует, что $M = L$. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Группа называется p-нильпотентной, если она содержит p'-холловскую нормальную подгруппу. Класс групп называется S-замкнутым (S_n-замкнутым), если он замкнут относительно подгрупп (нормальных подгрупп). Остальные необходимые определения и обозначения см. в [11], [12].

Лемма 1. *Класс всех конечных p-нильпотентных групп является локальной формацией (p – фиксированное простое число).*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [11, с. 34−35].

Лемма 2. *Класс* F *всех конечных p-нильпотентных групп является S-замкнутым классом Фиттинга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $G \in \mathsf{F}$, H – подгруппа в G. Из условия $G_{p'} \lhd G$ следует, что $H \cap G_{p'} \lhd H$. Кроме того, $H \cap G_{p'} \subseteq H_{p'}$. С другой стороны, $H_{p'} \subseteq H \cap G_{p'}$. Значит, $H \cap G_{p'} = H_{p'}$. Следовательно, $H_{p'} \lhd H$. Отсюда получим, что $H \in \mathsf{F}$.

2. Пусть $N, K \lhd G$ и $N, K \in \mathsf{F}$. Докажем, что $NK \in \mathsf{F}$, т.е. надо показать, что $(NK)_{p'} \lhd NK$. В самом деле, из $N_{p'}$ char $N \lhd G$ следует, что $N_{p'} \lhd G$. Аналогично $K_{p'} \lhd G$. Значит, $N_{p'}K_{p'} \lhd G$. Допустим, что $N_{p'}K_{p'} \neq (NK)_{p'}$. Отсюда следует, что существует такое простое $q \in \{p'\}$, что $N_qK_q \neq (NK)_q$. Последнее неравенство противоречит лемме 11.6 из [11]. Значит, $N_{p'}K_{p'} = (NK)_{p'}$, $(NK)_{p'} \lhd NK$. Следовательно, $NK \in \mathsf{F}$. Лемма доказана.

В силу лемм 1 и 2 класс F – радикальная формация.

Теорема 1. Пусть F – радикальная формация p-нильпотентных групп. Если в конечной группе G существует F-инъектор, то справедливы следующие утверждения:

1) если W есть F-максимальная подгруппа в коммутанте G', V_1 и V_2 − F-максимальные подгруппы в G, $W \subseteq V_1 \cap V_2$, то V_1 и V_2 сопряжены в G;

2) если V_1 и V_2 − F-инъекторы в G, то V_1 и V_2 сопряжены в G;

3) подгруппа V является F-инъектором группы G тогда и только тогда, когда V − F-максимальная подгруппа в G и $V \cap G'$ − F-инъектор в G'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – контрпример минимального порядка, для которого хотя бы одно утверждение не выполняется. Поскольку для $G = \langle 1 \rangle$ все три утверждения очевидным образом выполняются, то считаем, что $G \neq \langle 1 \rangle$. Т.к. при $G \in \mathsf{F}$ также все три утверждения справедливы, то считаем, что $G \notin \mathsf{F}$. Допустим, что $G' = G$. Предположим, что p делит порядок группы G. Значит, $|G_p| = p^n$. Если $n = 1$, то G_p – группа простого порядка и, значит, абелева. Если же $n > 1$, то подгруппа G_p содержит абелеву подгруппу. В обоих случаях имеем противоречие с допущением $G' = G$. Полагаем теперь, что p не делит $|G|$. Следовательно, G является p'-группой. Т.к. в этом случае приходим к противоречивому включению $G \in \mathsf{F}$, то полагаем в дальнейшем, что $G' \subset G$.

Допустим, что G – простая группа. С учетом того, что $G' \subset G$, справедливо равенство: $G' = 1$. Опять приходим к противоречивому включению $G \in \mathsf{F}$. Значит, G – непростая группа и $G' \neq \langle 1 \rangle$.

Докажем утверждение 1. Допустим, что $G' \in \mathsf{F}$. Тогда в силу определения подгруппы W

получим, что $W = G'$. Следовательно, $G' \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. Отсюда получим: $V_i \lhd G$, $i = 1, 2$. Возьмем $\mathfrak{F}$-инъектор F в группе G. Так как $F \cap V_i$ − $\mathfrak{F}$-инъектор в V_i, $i = 1, 2$, $V_i \in \mathfrak{F}$, то $F \cap V_i = V_i$, $V_i \subseteq F$. Учитывая тот факт, что V_i – $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы (по условию), из последнего включения получаем, что $V_i = F$, $i = 1, 2$. Следовательно, $V_1 = V_2$. Рассмотрим далее случай, когда $G' \notin \mathfrak{F}$. Поскольку $W \subseteq V_i \cap G'$, $V_i \cap G' \in \mathfrak{F}$ и W − $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $V_i \cap G'$, $i = 1, 2$, то справедливо равенство:

$$W = V_i \cap G'. \qquad (1)$$

Так как $V_i \cap G' \lhd V_i$, то $W \lhd V_i$. Значит, $V_i \subseteq N_G(W)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. W − не нормальная подгруппа в группе G. Отсюда следует, что $N_G(W) \subset G$. Заметим, что, так как $W \in \mathfrak{F}$, а $G' \notin \mathfrak{F}$, то $W \subset G'$. Кроме того, $(N_G(W))' \subseteq G'$. Покажем далее, что коммутант $(N_G(W))'$ обладает такой $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой, которая входит и в подгруппу V_1, и в подгруппу V_2. Для этой цели используем включения: $W \subseteq W(N_G(W))' \subseteq G'$.

Рассмотрим следующие возможные подслучаи. 1.1. $W(N_G(W))' = G'$. Так как W и $(N_G(W))'$ входят в $N_G(W)$, то $G' \subseteq N_G(W)$. Отсюда получим, что $V_iG' \subseteq N_G(W) \subset G$. Следовательно, $V_iG' \subset G$. Далее из включения $G' \subseteq N_G(W) \subset G$ получим, что $N_G(W) \lhd G$. Значит, $F \cap N_G(W)$ есть $\mathfrak{F}$-инъектор в группе $N_G(W)$. Т.к. $W \lhd N_G(W)$, то $W \cap F \cap N_G(W) = W \cap F$ есть $\mathfrak{F}$-инъектор в группе $W \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $W \subseteq F$. Далее, т.к. $V_iG' \lhd G$, то $V_iG' \lhd N_G(W)$. Отсюда следует, что $F \cap N_G(W) \cap V_iG'$ – $\mathfrak{F}$-инъектор в группе V_iG' для всех $i = 1, 2$.

В силу включений $W \subseteq F \cap N_G(W) \cap G'$ и того факта, что W – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в коммутанте G', получим: либо $F \cap N_G(W) \cap G' = G'$, либо $F \cap N_G(W) \cap G' = W$. Если допустить, что $F \cap N_G(W) \cap G' = G'$, то получим противоречивое включение $G' \in \mathfrak{F}$. Значит, $F \cap N_G(W) \cap G' = W$. Далее, т.к. $G' \subseteq N_G(W)$, то $F \cap G' = W$. Применяя теперь (1), получим, что $V_i \cap G'$ есть $\mathfrak{F}$-инъектор в группе G'. Значит, в силу того, что $(V_iG')' \lhd G'$, имеем: $V_i \cap G' \cap (V_iG')' = V_i \cap (V_iG')'$. Правая часть последнего равенства есть $\mathfrak{F}$-инъектор в группе $(V_iG')'$. По пункту 3 теоремы 1 (и в силу индукции) получим, что V_i есть $\mathfrak{F}$-инъектор в группе V_iG', $i = 1, 2$. Теперь ясно, что V_1 сопряжена с подгруппой $F \cap N_G(W) \cap V_1G'$, а V_2 – с подгруппой $F \cap N_G(W) \cap V_2G'$. Получим: $V_1^a = F \cap N_G(W) \cap V_1G', a \in V_1G'$, $V_2^b = F \cap N_G(W) \cap V_2G', b \in V_2G'$. Значит, $V_1^a \subseteq F$, $V_2^b \subseteq F$. Очевидно, что $V_1^a = F$, $V_2^b = F$. Отсюда следует, что $V_1 = V_2^c$, $c = ba^{-1} \in G$.

1.2. $W(N_G(W))' \subset G'$. Допустим, что $W(N_G(W))' \in \mathfrak{F}$. Из включений $W \subseteq W(N_G(W))' \subseteq G'$ и того факта, что подгруппа W – $\mathfrak{F}$-максимальная в группе G', получим: либо равенство $W(N_G(W))' = G'$, либо равенство $W(N_G(W))' = W$. Если допустить равенство $W(N_G(W))' = G'$, то приходим к противоречивому включению: $G' \in \mathfrak{F}$. Значит, $W(N_G(W))' = W$. Отсюда следует, что $(N_G(W))' \subseteq W$. Теперь очевидно, что $(N_G(W))' \in \mathfrak{F}$. Т.к., кроме того, $(N_G(W))' \subseteq V_1 \cap V_2$, то по пункту 1 теоремы 1 получаем сопряженность подгрупп V_1, V_2 в группе $N_G(W)$, а значит, и в группе G.

Переходим теперь к случаю, когда $W(N_G(W))' \notin \mathfrak{F}$. Рассмотрим главный ряд (a_1) группы $N_G(W)$:

$$1 \subseteq \ldots \subseteq H \subseteq \ldots \subseteq (N_G(W))' \subseteq \ldots \subseteq N_G(W).$$

В него входит H – нормальная $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в группе $(N_G(W))'$. В силу включений $W \subseteq WH \subseteq WN_G(W)' \subseteq G'$ ясно, что W является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в группе $WH \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $H \subseteq W$. Допустим, что в группе $(N_G(W))'$ существует такая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа S, что выполняется включение $H \subseteq S$. Если $H = S$, то из включения $H \subseteq W$ следует, что $S \subseteq W$. В этом случае $S \subseteq V_1 \cap V_2$. В силу пункта 1 теоремы 1 (и индуктивных рассуждений) получаем сопряженность подгрупп V_1, V_2. Пусть $H \subset S$. Если $H = W$, то из включений $W \subset S \in \mathsf{F}$ и $S \subseteq (N_G(W))'$ получим: $W \subseteq (N_G(W))'$. Т.к., кроме того, $(N_G(W))' \subseteq G'$, то очевидно, что W есть F-максимальная подгруппа в группе $(N_G(W))'$. По пункту 1 теоремы 1 получаем требуемую сопряженность подгрупп V_1, V_2. Пусть теперь $H \subset W$. В главном ряду (a_1) между подгруппой N (такой, что $H \subseteq N \subseteq (N_G(W))'$) и $N_G(W)$ все подгруппы не принадлежат F (в противном случае получим противоречие с нашим допущением $W(N_G(W))' \notin \mathsf{F}$). Теперь рассмотрим главный ряд (a_2) группы $N_G(W)$: $1 \subseteq \ldots \subseteq H \subseteq \ldots \subseteq W \subseteq \ldots \subseteq$ $\subseteq W(N_G(W))' \subseteq \ldots \subseteq N_G(W)$. Между подгруппами H и W существует главный фактор W/R, который принадлежит F, $H \subseteq R$. В силу теоремы об изоморфизме двух главных рядов группы $N_G(W)$ фактор W/R изоморфен некорому главному фактору A/B ряда (a_1), который находится между подгруппой H и $N_G(W)$, причем $A/B \notin \mathsf{F}$. Противоречие.

2. $W \triangleleft G$. Покажем сначала, что подгруппы V_i являются F-инъекторами в группе G, $i = 1, 2$. Допустим, что $V_1G' \subset G$. Пусть F – F-инъектор в группе G. Тогда $F \cap W = W$, $W \subseteq F \cap G'$. Т.к. W – F-максимальная в группе G' (а значит и в группе $F \cap G'$), то справедливо равенство $W = F \cap G'$. Значит (с учетом формулы 1), $V_i \cap G'$ – F-инъектор в группе G'. Поскольку $(V_1G')' \triangleleft V_1G'$ и $(V_1G')' \subseteq G'$, то $V_1 \cap G' \cap (V_1G')'$ – F-инъектор в $(V_1G')'$. Так как $V_1 \cap G' \cap (V_1G')' = V_1 \cap (V_1G')'$, то $V_1 \cap (V_1G')'$ – F-инъектор в $(V_1G')'$. По индукции V_1 – F-инъектор в V_1G' (применили пункт 3 теоремы 1). Пусть F – F-инъектор в группе G. Т.к. $F \cap V_1G'$ – F-инъектор в V_1G', то (по индукции) получим сопряженность: $V_1^x = V_1G' \cap F$, $x \in V_1G'$. Отсюда следует, что $V_1^x \subseteq F$. Т.к. V_1^x – F-максимальная подгруппа в G, то $V_1^x = F$, т.е. V_1^x – F-инъектор в G. Аналогично рассуждая, можно показать, что $V_2^y = F$, $y \in V_2G'$. Значит, $V_1^x = V_2^y$, $x, y \in G$.

Полагаем теперь, что выполняется равенство: $V_1G' = G$. Так как $W \triangleleft G$, то $F \cap W$ есть F-инъектор в группе $W \in \mathsf{F}$. Ясно, что $F \cap W = W$. Отсюда следует, что $W \subseteq F$ и $W \subseteq F \cap G'$. Поскольку W – F-максимальная подгруппа в группе G', то $W = F \cap G'$. Теперь с учетом (1) получим следующие равенства:

$$W = F \cap G' = V_1 \cap G' = V_2 \cap G'. \tag{2}$$

Возьмем в группе G такую наибольшую нормальную подгруппу H, чтобы выполнялось включение $G' \subseteq H$. Так как $F \cap H'$ есть F-инъектор в H' и $F \cap H \cap H' = F \cap H'$, то $F \cap H \cap H'$ есть F-инъектор в H'. Ввиду равенства $F \cap G' \cap H' = F \cap H'$ ясно, что $F \cap G' \cap H'$ – F-инъектор в H'. В силу (2) получим, что $V_1 \cap G' \cap H'$ – F-инъектор в H'. С учетом равенства $V_1 \cap G' \cap H' = V_1 \cap H'$ получим: $V_1 \cap H'$ – F-инъектор в H'. Далее покажем, что $V_1 \cap H$ является F-максимальной подгруппой в группе H. Допустим противное, т.е. выполняется строгое включение

$$V_1 \cap H \subset L, \tag{3}$$

где L – F-максимальная подгруппа в $H \notin \mathsf{F}$, $H \subseteq G$ (если допустить, что $H \in \mathsf{F}$, то из $G' \subseteq H$ получим противоречивое включение $G' \in \mathsf{F}$). Рассмотрим следующие соотношения: $V_1 \cap G' = V_1 \cap H \cap G' \subseteq L \cap G'$. Теперь ясно, что $W = V_1 \cap G' \subseteq L \cap G'$. Поскольку $L \cap G' \in \mathsf{F}$ и W является F-максимальной подгруппой в группе G', то справедливы равенства

$$W = V_1 \cap G' = L \cap G'. \tag{4}$$

Т.к. $LG' \subseteq H \subset G = V_1G'$, то $LG' \subseteq V_1G' \cap H = G'(V_1 \cap H)$ (применили тождество Дедекинда). Рассмотрим теперь соотношения:

$$|L| \cdot |G'| / |L \cap G'| \leq |G'| \cdot |V_1 \cap H| / |V_1 \cap G'|.$$

Используя (4), получим: $|L| \leq |V_1 \cap H|$. Пришли к противоречию с допущением (3). Значит, $V_1 \cap H$ – F-максимальная подгруппа в H. По индукции (с применением пункта 3 теоремы 1): $V_1 \cap H$ – F-инъектор в H.

Т.к. $F \cap H$ – F-инъектор в H, то справедливо равенство:

$$F \cap H = V_1^x \cap H, \; x \in H. \tag{5}$$

Из (5) следует равенство: $(F \cap H)G' = (V_1^x \cap H)G'$. Применяя тождество Дедекинда, получим равенство: $H \cap FG' = H \cap V_1^x G'$. Т.к. $V_1^x G' = G$, то $H \cap FG' = H$. Теперь ясно, что $H \subseteq FG'$. Т.к. H – максимальная нормальная подгруппа в группе G, то $H = FG'$. Отсюда следует, что $F \subseteq H$. Теперь используя (5), имеем равенство: $F = V_1^x \cap H$. Отсюда следует включение $F \subseteq V_1^x$. Учитывая свойства F-инъектора, получим равенство: $F = V_1^x$, т.е. V_1^x есть F-инъектор в группе G. Аналогично рассуждая, можно показать, что подгруппа V_2^y – F-инъектор группы G. Без ограничения общности будем считать, что V_1, V_2 – F-инъекторы группы G. Далее докажем сопряженность подгрупп V_1, V_2 в группе G.

Возьмем простое $p \in \pi(V_1)$. Поскольку $G' \subseteq V_{1p}G'$, то $V_{1p}G' \lhd G$ (через V_{1p} обозначили силовскую p-подгруппу группы V_1). Допустим, что

$$V_{1p}G' \subset G. \qquad (6)$$

Предположим, что $V_{1p}W$ – не нормальная подгруппа в G. Отсюда следует, что $N_G(V_{1p}W) \subset G$. Применяя равенство (2) и тождество Дедекинда, получим следующее равенство: $V_{1p}W = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_1 \cap V_{1p}G'$. Ясно, что $V_{1p}W$ и $V_2 \cap V_{1p}G'$ – F-инъекторы в группе $V_{1p}G'$. Так как имеет место включение (6), то по индукции (с применением пункта 2 теоремы 1) получим сопряженность F-инъекторов: $V_2^a \cap V_{1p}G' = V_{1p}W$, $a \in V_{1p}G'$. Отсюда следует, что $V_{1p} \subseteq V_2^a$. Значит,

$$V_{1p} \subseteq \left(V_2^a\right)_p, \qquad (7)$$

где $\left(V_2^a\right)_p$ – p-силовская подгруппа в V_2^a.

Полагаем теперь, что $V_{1p}W \lhd G$. В этом случае (в силу индукции) F-инъекторы $V_2 \cap V_{1p}G'$ и $V_1 \cap V_{1p}G' = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_{1p}W$ сопряжены в группе V_1G'. Значит, в силу того, что $V_{1p}W \lhd G$, эти инъекторы совпадают: $V_2 \cap V_{1p}G' = V_{1p}W$. Легко заметить включение:

$$V_{1p} \subseteq V_{2p}. \qquad (8)$$

Если теперь допустить, что для всех простых $p \in \pi(V_1)$ справедливо включение $V_{1p}G' \subset G$, то отсюда следует включение (8) или (7) для всех простых $p \in \pi(V_1)$. Значит, $V_1 \subseteq V_2^x$, $x \in G$. Следовательно, $V_1 = V_2^x$, $x \in G$. Пусть существует такое простое $p \in \pi(V_1)$, что выполняется $V_{1p}G' = G$. Применяя тождество Дедекинда, получим равенства:

$$V_{1p}W = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_1 \cap V_{1p}G' = V_1.$$

Если $V_{1p}W \lhd G$, то ясно, что $V_1 \lhd G$. В этом случае $V_1 \cap V_2$ есть F-инъектор в группе V_1. Так как $V_1 \in \mathrm{F}$, то $V_1 \cap V_2 = V_1$, $V_1 \subseteq V_2$. Ясно, что в этом случае справедливо равенство $V_1 = V_2$. Пусть подгруппа $V_{1p}W$ не нормальная в G. Применяя равенство $V_{1p}W = V_1$ и лемму 11.6 из [11], получим, что для всех $q \in \pi(V_1)$ и $q \neq p$ справедливо равенство силовских q-подгрупп: $W_q = V_{1q}$. Следовательно (с учетом включения $W \subseteq V_2$), для всех простых $q \in \pi(V_1)$, кроме $p \in \pi(V_1)$, получим включение: $V_{1q} \subseteq V_{2q}$.

Далее, т.к. $V_{1p} \subseteq G_p$, $V_{2p} \subseteq G_p^y$, $y \in G$, то $V_{2p}^x \subseteq G_p$, $x = y^{-1}$. Отсюда следует, что $V_1 \subseteq G_pW$, $V_2^x \subseteq G_pW$, $x \in G$. Предположим, что $G_pW = G$. Из $W \in \mathrm{F}$ следует, что p'-холловская подгруппа H группы W нормальна в группе W. Очевидно, что $H \lhd G$. Кроме того, используем равенства: $|G| = \dfrac{|G_p|\cdot|W|}{|G_p \cap W|} = \dfrac{|G_p|\cdot|W_p|\cdot|H|}{|W_p|} = |G_p|\cdot|H|$. Очевидно, что подгруппа H является p'-холловской подгруппой в группе G, причем, нормальной подгруппой в G. Но в этом случае получаем противоречивое включение $G \in \mathrm{F}$. Значит, $G_pW \subset G$. Если допустить, что $G_pW \lhd G$, то в силу условия $(G_pW)'\ char\ G_pW$ получим: $(G_pW)' \lhd G$. Следовательно, $V_1 \cap (G_pW)'$ и $V_2^x \cap (G_pW)'$ являются F-инъекторами в группе $(G_pW)'$. По индукции (с применением пункта 3 теоремы 1) V_1 и V_2^x – F-инъекторы в группе G_pW и (с применением пункта 2 теоремы 1) V_1, V_2^x – сопряжены в G_pW. Значит, V_1 и V_2 сопряжены в группе *G*.

Пусть $G_p W$ − не нормальная подгруппа в группе *G*. В этом случае справедливо строгое включение: $N_G(G_p W) \subset G$. Введем обозначение: $(N_G(G_p W))' = K$. Предположим, что $W \cap K$ является F-максимальной подгруппой в группе *K*. Тогда в силу пункта 1 теоремы 1 (и индуктивных рассуждений) получим сопряженность подгрупп V_1, V_2. Пусть теперь $W \cap K \subset S$, где S – F-максимальная подгруппа в группе *K*. Далее, т.к. $W \triangleleft G$, то $F \cap W$ есть F-инъектор в группе $W \in \mathsf{F}$. Отсюда следует, что $W \subseteq F$. Значит, $W \subseteq F \cap G'$. Поскольку W – F-максимальная подгруппа в группе $F \cap G' \in \mathsf{F}$, то $W = F \cap G'$. Далее в силу включений $W \subseteq (F \cap G')S \cap F \subseteq F \cap G'$ и равенства $W = F \cap G'$ получим: $W = (F \cap G')S$.

Отсюда следует, что $S \subseteq W$ и $S \subseteq V_1 \cap V_2$. Итак, существует F-максимальная подгруппа в коммутанте $(N_G(G_p W))'$ группы $N_G(G_p W)$, которая входит в $V_1 \cap V_2$. По пункту 1 теоремы 1 (и в силу индуктивных рассуждений) получаем сопряженность подгрупп V_1, V_2. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2 (напомним, что в силу вышеизложенного имеем формулу: $1 \neq G' \subset G$). Так как $V_i \cap G'$ является F-инъектором в группе G' для $i = 1, 2$, то (в силу индуктивных рассуждений) получим сопряженность подгрупп: $V_1 \cap G' = (V_2 \cap G')^x = V_2^x \cap G'$, $x \in G'$. Введем обозначение: $W = V_1 \cap G' = V_2^x \cap G'$. Т.к. (в силу пункта 1 теоремы 1) подгруппы V_1 и V_2^x сопряжены в группе *G*, то подгруппы V_1 и V_2 сопряжены в группе *G*. Утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3. Пусть V – F-максимальная подгруппа в группе *G* и $V \cap G'$ – F-инъектор в G'.

Для F-инъектора *K* группы *G* получим сопряженность (в силу п. 2 теоремы 1): $V \cap G' = K^x \cap G'$, $x \in G'$. Поскольку $W = V \cap G' = K^x \cap G'$ является F-максимальной подгруппой в G', $W \subseteq V \cap K^x$, то (в силу пункта 1 теоремы 1) подгруппы V и K^x сопряжены в *G*. Значит, подгруппы *V* и *K* сопряжены в *G*. Следовательно, подгруппа *V* – F-инъектор в группе *G*. Доказательство обратного утверждения очевидно. Утверждение 3 доказано. Теорема 1 доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
2. Balester-Bolinshes, A. Classes of Finite Groups / A. Balester-Bolinshes, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006.
3. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // в сб. «Конечные группы». – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
4. Сементовский, И.Г. Δ-нильпотентные инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // в сб. «Вопросы алгебры». – 1985. – Вып. 1. – С. 72–86.
5. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. − Vol. 56. – P. 516–532.
6. Vorob'ev, N.T. Gaschütz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N.T. Vorob'ev // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 155–166.
7. Залесская, Е.Н. О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп / Е.Н. Залесская // Дискретная математика. – 2004. – Т. 16, вып. № 1. – С. 105–113.
8. Гойко, В.И. О существовании сопряженного класса инъекторов в конечных группах / В.И. Гойко // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 17–22.
9. Iranzo, M.J. Fitting classes F such that all finite groups have F-injector / M.J. Iranzo, F. Perez-Monasor // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. – P. 97–101.
10. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. – P. 293–297.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
12. Doerk, K. Finite soluble groups. Walter de Gruyter / K. Doerk, T.O. Hawkes. – Berlin, 1992.

R E F E R E N C E S

1. Fischer B. *Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.*
2. Balester-Bolinshes A., Ezquerro L.M. *Classes of Finite Groups. – Springer, 2006.*
3. Shemetkov L.A. *Konechniye gruppi* [Finite Groups], Mn., Nauka i tekhnika, 1975, pp. 207–212.
4. Sementovski I.G. *Voprosi algebri* [Issues of Algebra], 1985, 1, pp. 72–86.
5. Blessenohl D. *Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. − Vol. 56. – P. 516–532.*
6. Vorobyev N.T. *Voprosi algebri* [Issues of Algebra], 2000, 3(16), pp. 155–166.
7. Zalesskaya E.N. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics], 2004, 16(1), pp. 105–113.
8. Goiko V.I. *Dokladi NAN Belarusi* [Reports of NASc of Belarus], 2008, 52(6), pp. 17–22.
9. Iranzo, M.J. *Fitting classes* F *such that all finite groups have* F-*injector / M.J. Iranzo, F. Perez-Monasor* // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. – P. 97–101.
10. Förster, P. *Nilpotent injectors in finite groups* / P. Förster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. – P. 293–297.
11. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnikh grupp* [Formations of Finite Groups], M., Nauka, 1978, 272 p.
12. Doerk K., Hawkes T.O. *Finite soluble groups.* Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

Поступила в редакцию 29.08.2016

Адрес для корреспонденции: e-mail: stage@tut.by – Гойко В.И.