Матэматыка

УДК 517.165

Точные константы в неравенствах эквивалентности для некоторых норм

Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Две нормы $\|x\|$ *и* $\|x\|^*$ *в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие постоянные* $c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$, *что для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство* $c_1\|x\| \le \|x\|^* \le c_2\|x\|$.

Целью настоящей работы является доказательство неравенств

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \max_{1\le j\le n}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{p}}}{b_j^{\frac{1}{q}}}\right)(a_j > 0, b_j > 0, 1 < q < p < \infty), \tag{1}$$

$$\min_{1\le j\le n}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{q}}}{b_j^{\frac{1}{p}}}\right) \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \le \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j^p}{b_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (a_j > 0, b_j > 0, 1 < q < p < \infty) \tag{2}$$

и рассмотрение их интегральных аналогов.

Материал и методы. *Основным методом, который был использован при проведении данного исследования, являлся метод математической индукции. Доказательство интегральных аналогов неравенств (1) и (2) производилось по следующей схеме: сначала неравенства устанавливались для интегральных сумм, а затем осуществлялся переход к пределу при* $n \to \infty$.

Результаты и их обсуждение. *Имеют место неравенства:*

$$\left(\left(\frac{u^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{v^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{q-p} \le \frac{(a+bs^p)^q}{(u+vs^q)^p} \le \max\left(\frac{a^q}{u^p}, \frac{b^q}{v^p}\right)(a, b, u, v, s > 0, 1 < q < p < \infty), \tag{3}$$

$$\min\left(\frac{a^p}{u^q}, \frac{b^p}{v^q}\right) \le \frac{(a+b\cdot s^q)^p}{(u+v\cdot s^p)^q} \le \left(\left(\frac{a^p}{u^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b^p}{v^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{p-q} (a, b, u, v, s > 0, 1 < q < p < \infty). \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) означают, что неравенства (1) и (2) справедливы при $n = 2$.

Доказательство неравенств (1) и (2) основывалось на свойствах следующей функции: $\varphi(s) = \dfrac{\left(a + b\cdot s^p\right)^q}{\left(u + v\cdot s^q\right)^p} (0 \le s < \infty)$, *т.е.*

при $1 < q < p < \infty$ *эта функция достигала своего максимального значения в точке* $s = \left(\dfrac{a\cdot v}{b\cdot u}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

Заключение. *В результате проведенного исследования были доказаны неравенства (1) и (2), их интегральные аналоги. Исследованы некоторые частные случаи доказываемых неравенств. Представляется, что рассматриваемые вопросы могут быть полезны с точки зрения преподавания математики, в том числе и как интересные иллюстрации связи ее различных разделов.*

Ключевые слова: *точные константы, неравенство эквивалентности, норма, линейное пространство, неравенство Колмогорова, метод математической индукции, интегральные аналоги неравенств.*

Exact Constants in Equivalence Inequalities for Some Norms

Y.V. Trubnikov, K.L. Yakuto
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

Two norms $\|x\|$ *and* $\|x\|^*$ *in a linear space of* X *are called equivalent if there exist such constants* $C_1 > 0$ *and* $C_2 > 0$ *that for all* $x \in X$ *the following inequality holds:* $c_1\|x\| \le \|x\|^* \le c_2\|x\|$.

The aim of this work is the proof of the inequalities

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \max_{1\le j\le n}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{p}}}{b_j^{\frac{1}{q}}}\right)(a_j > 0, b_j > 0, 1 < q < p < \infty), \tag{1}$$

$$\min_{1\le j\le n}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{q}}}{b_j^{\frac{1}{p}}}\right) \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \le \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j^p}{b_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \quad (a_j > 0, b_j > 0, 1 < q < p < \infty) \tag{2}$$

and consideration of their integral analogues.

Material and methods. *The main method that was used in conducting this study was the method of mathematical induction. The proof of the integral analogues of the inequalities (1) and (2) was carried out according to the following scheme: first, inequalities were established for integral amounts, and then making the transition to the limit as* $n \to \infty$.

Findings and their discussion. *There are inequalities:*

$$\left(\left(\frac{u^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{v^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{q-p} \le \frac{(a+bs^p)^q}{(u+vs^q)^p} \le \max\left(\frac{a^q}{u^p}, \frac{b^q}{v^p}\right)(a, b, u, v, s > 0, 1 < q < p < \infty), \tag{3}$$

$$\min\left(\frac{a^p}{u^q}, \frac{b^p}{v^q}\right) \le \frac{(a+b\cdot s^q)^p}{(u+v\cdot s^p)^q} \le \left(\left(\frac{a^p}{u^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b^p}{v^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{p-q} \quad (a, b, u, v, s > 0, 1 < q < p < \infty). \tag{4}$$

Inequalities (3) and (4) indicate that inequalities (1) and (2) are valid for n = 2.

The proof of inequalities (1) and (2) is based on the properties of $\varphi(s) = \frac{\left(a+b\cdot s^p\right)^q}{\left(u+v\cdot s^q\right)^p}(0 \le s < \infty)$ *i.e., when* $1 < < q < p < \infty$,

this function reached its maximum value at the point $s = \left(\frac{a\cdot v}{b\cdot u}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

Conclusion. *As a result of the study inequalities (1) and (2) were proved, their integral analogs. We considered some specific cases of the investigated inequalities. It appears that the issues can be useful from the point of view of teaching mathematics, as well as interesting illustrations of the relationships of its various parts.*

Key words: *exact constants, inequality of equivalence, norm, linear space, Kolmogorov's inequality, mathematical induction, integral analogues of inequalities.*

Пусть на некотором линейном пространстве E заданы две нормы, по отношению к каждой из которых E – банахово пространство. Если хотя бы одна из этих норм подчинена другой, то эти нормы эквивалентны [1, с. 239].

Определение. *Две нормы* $\|x\|$ *и* $\|x\|^*$ в *линейном нормированном пространстве* X *называются эквивалентными, если существуют такие постоянные* $c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$, *что для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство* $c_1\|x\| \le \|x\|^* \le c_2\|x\|$.

Выделение эквивалентных норм вызвано тем, что эквивалентные нормы порождают одинаковые топологии, одинаковые сходящиеся последовательности, одинаковые последовательности

Коши, одинаковые классы ограниченных операторов, ограниченные множества, замкнутые множества, компактные и предкомпактные множества [2, с. 157]. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Целью настоящей работы является доказательство неравенств

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\left|x_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \tag{1}$$

$$\le \max_{1\le j\le n}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{p}}}{b_j^{\frac{1}{q}}}\right)\left(a_j>0, b_j>0, 1<q<p<\infty\right),$$

$$\min_{1\le j\le n}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{q}}}{b_j^{\frac{1}{p}}}\right) \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\left|x_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \le \tag{2}$$

$$\le \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j^p}{b_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \quad \left(a_j>0, b_j>0, 1<q<p<\infty\right)$$

и рассмотрение их интегральных аналогов.

Материал и методы. Основным методом, который был использован при проведении данного исследования, являлся метод математической индукции. Была доказана лемма, утверждающая, что выполняются неравенства (3) и (4), которые в рассматриваемом случае выступают в качестве базы индукции.

Доказательство леммы основывалось на свойствах функций (5) и (6). Далее были сделаны предположения индукции (6) и (7) и проведен шаг индукции. Доказательство интегральных аналогов неравенств (1) и (2) производилось по следующей схеме: сначала неравенства устанавливались для интегральных сумм, а затем осуществлялся переход к пределу при $n \to \infty$.

Результаты и их обсуждение. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. *Имеют место неравенства:*

$$\left(\left(\frac{u^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{v^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{q-p} \le \frac{(a+bs^p)^q}{(u+vs^q)^p} \le \tag{3}$$

$$\le \max\left(\frac{a^q}{u^p}, \frac{b^q}{v^p}\right)(a,b,u,v,s>0, 1<q<p<\infty),$$

$$\min\left(\frac{a^p}{u^q}, \frac{b^p}{v^q}\right) \le \frac{(a+b\cdot s^q)^p}{(u+v\cdot s^p)^q} \le \tag{4}$$

$$\le \left(\left(\frac{a^p}{u^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b^p}{v^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{p-q} (a,b,u,v,s>0, 1<q<p<\infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства неравенства (3) найдем экстремум функции

$$\varphi(s) = \frac{(a+bs^p)^q}{(u+vs^q)^p}\,(0\le s<\infty). \tag{5}$$

Так как $A\dfrac{d\varphi}{ds} = q\cdot p(a+b\cdot s^p)^{q-1}\cdot(u+v\cdot s^q)^{p-1}\cdot$
$\cdot s^{q-1}\cdot(b\cdot u\cdot s^{p-q} - a\cdot v),$

где A – знаменатель производной, то в точке $s_* = \left(\frac{a\cdot v}{b\cdot u}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ производная меняет знак с «–» на «+», т.е. в этой точке достигается локальный, а в силу того, что при $s\in(0,\infty)$ такая точка единственна, и абсолютный минимум функции $\varphi(s)$.

Вычислив

$$\varphi(s_*) = \frac{\left[a+b\cdot\left(\frac{a\cdot v}{b\cdot u}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]^q}{\left[a+b\cdot\left(\frac{a\cdot v}{b\cdot u}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]^p} = \frac{\left[a\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{p}{p-q}} + b\cdot\left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]^q}{\left[u\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{q}{p-q}} + v\cdot\left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{q}{p-q}}\right]^p} =$$

$$= \left[\left(\frac{u^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{v^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{q-p},$$

получаем левое из неравенств (3).

Абсолютный максимум может достигаться либо при $s=0$, либо при $s=\infty$, но $\varphi(0) = \frac{a^q}{u^p}$, $\varphi(\infty) = \lim_{s\to\infty}\varphi(s) = \frac{b^q}{v^p}$ и, таким образом, получается правое из неравенств (3).

Для доказательства неравенства (4) рассмотрим функцию $g(s) = \frac{(a+b\cdot s^q)^p}{(u+v\cdot s^p)^q}\,(0\le s<\infty)$. (6)

Ее производная

$A\ \frac{dg}{ds} = q\cdot p(a+b\cdot s^q)^{p-1}\cdot(u+v\cdot s^p)^{q-1}\cdot$ $\cdot s^{q-1}\cdot(b\cdot u - a\cdot v\cdot s^{p-q})$ меняет знак «+» на «–» в точке $s_* = \left(\frac{b\cdot u}{a\cdot v}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ и, таким образом, $g(s)\le g(s_*) = \left[\left(\frac{a^p}{u^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b^p}{v^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{p-q}$. В таком случае левое из неравенств (4) является очевидным.

Неравенства (3) и (4) означают, что неравенства (1) и (2) справедливы при $n = 2$.

Сделаем предположение индукции. Пусть выполнены неравенства (7) и (8):

$$\left[\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \tag{7}$$

$$\le \max_{1\le j\le n-1}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{p}}}{b_j^{\frac{1}{q}}}\right)(a_j>0, b_j>0, 1<q<p<\infty),$$

$$\min_{1\le j\le n-1}\left(\frac{a_j^{\frac{1}{q}}}{b_j^{\frac{1}{p}}}\right) \le \frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \le \tag{8}$$

$$\le \left[\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{a_j^p}{b_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \quad (a_j>0, b_j>0, 1<q<p<\infty).$$

Тогда выполнено равенство (9):

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p + a_n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q + b_n|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \tag{9}$$

Применяя к выражению правое из неравенств (3) при $a = \sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p$, $u = \sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q$, $s = |x_n|$, $b = a_n$, $v = b_n$ получаем

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p + a_n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q + b_n|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \max\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}, \frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{b_n^{\frac{1}{q}}}\right). \tag{10}$$

К выражению $\frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ применяем правое из неравенств (7), т.е. предположение индукции и, таким образом, получаем правое из неравенств (1).

Докажем теперь левое из неравенств (1). Для этого применим к выражению (9) левое из неравенств (3):

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p + a_n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q + b_n|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \ge \tag{11}$$

$$\ge \left(\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^q\right)^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^p\right)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b_n^p}{a_n^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{q-p}.$$

Далее к выражению $\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j|x_j|^q\right)^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j|^p\right)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ применим правое из неравенств (8) и тогда

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q\right)^p}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p\right)^q} = \left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^{pq} \le \tag{12}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{p-q}.$$

Неравенство (12) позволяет продолжить оценку выражения (11) следующим образом:

$$\frac{1}{\left(\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j |x_j|^q\right)^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j |x_j|^p\right)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b_n^p}{a_n^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{p-q}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} + \left(\frac{b_n^p}{a_n^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{p-q}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_j^p}{a_j^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{q-p},$$

что соответствует предположению индукции.

Отметим некоторые частные случаи неравенств (1) и (2).

При $b_j = a_j$ $(1 \leq j \leq n)$ получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \frac{\left(\left(\sum_{j=1}^{n} b_j |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j |x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \max_{1\leq j\leq n}\left(b_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right);$$

умножив обе части последнего неравенства на $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j |x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, будем иметь

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \max_{1\leq j\leq n}\left(b_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right) \cdot \|x\|_q. \qquad (13)$$

Неравенство (13) совпадает с неравенством (2.9.1) ([3], с. 41), если выполняется условие $\sum_{j=1}^{n} b_j = 1$:

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \max_{1\leq j\leq n}\left(b_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right) \cdot \|x\|_q. \qquad (14)$$

Причем правое из неравенств (14) в монографии [3] не приводится.

Рассмотрим интегральные аналоги неравенств (1) и (2). Интегральным аналогом неравенства (1) является следующее неравенство:

$$\left(\int_m^M \left(\frac{g^p(x)}{h^q(x)}\right)^{\frac{1}{p-q}} dx\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \frac{\left(\int_m^M h(x)|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_m^M g(x)|f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} \; (h(x) > \qquad (15)$$

$> 0, g(x) > 0, 1 < q < p < \infty, x \in [m, M]$).

Докажем неравенство (15). Применим левое из неравенств (1) к интегральным суммам:

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} h(x_j)\cdot\frac{M-m}{n}|f(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} g(x_j)\cdot\frac{M-m}{n}|f(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g(x_j)^p\cdot\left(\frac{M-m}{n}\right)^p}{h(x_j)^q\cdot\left(\frac{M-m}{n}\right)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = \qquad (16)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g(x_j)^p}{h(x_j)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\cdot\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Сумма $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g(x_j)^p}{h(x_j)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\cdot\frac{M-m}{n}$ является интегральной для интеграла $\int_m^M\left(\frac{g^p(x)}{h^q(x)}\right)^{\frac{1}{p-q}}dx$.

Переходя в левой и правой частях неравенства (16) к пределу при $n\to\infty$, получаем неравенство (15).

Однако применяя правое из неравенств (1) к интегральным суммам, получаем следующий результат:

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} h(x_j)\cdot\frac{M-m}{n}|f(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{j=1}^{n} g(x_j)\cdot\frac{M-m}{n}|f(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \max_{1\leq j\leq n}\frac{h(x_j)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{p}}}{g(x_j)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}} =$$

$$= \left(\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot\max_{1\leq j\leq n}\frac{h(x_j)^{\frac{1}{p}}}{g(x_j)^{\frac{1}{q}}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}=\infty$, оценка сверху для выражения (15) имеет вид

$$\frac{\left(\int\limits_m^M h(x)\left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_m^M g(x)\left|f(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}<\infty$$

и, следовательно, интереса не представляет.

В частности, если $g^p(x)\equiv h^q(x)$, то неравенство (15) имеет вид:

$$\left(\int\limits_m^M dx\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\le\frac{\left(\int\limits_m^M h(x)\left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_m^M h(x)\left|f(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}\text{, т.е.}$$

$$\frac{1}{M-m}\left(\int\limits_m^M h(x)\left|f(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\frac{1}{M-m}\left(\int\limits_m^M h(x)\left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (17)$$

Неравенство (17) известно ([4], с. 14).

Интегральным аналогом неравенства (2) является неравенство

$$\frac{\left(\int\limits_m^M h(x)\left|f(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_m^M g(x)\left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}\le \qquad (18)$$

$$\le\left(\int\limits_m^M\left(\frac{h^p(x)}{g^q(x)}\right)^{\frac{1}{p-q}}dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Доказывается неравенство (18) аналогично неравенству (15), т.е. оно сначала устанавливается для интегральных сумм, а затем осуществляется переход к пределу при $n\to\infty$.

$$\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}h(x_j)\cdot\frac{M-m}{n}\left|f(x_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}g(x_j)\cdot\frac{M-m}{n}\left|f(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\le$$

$$\le\frac{\left(\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\frac{M-m}{n}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{h(x_j)^p}{g(x_j)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{h(x_j)^p}{g(x_j)^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}\cdot\frac{(M-m)}{n}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Последняя сумма является интегральной для интеграла $\int\limits_m^M\left(\frac{h^p(x)}{g^q(x)}\right)^{\frac{1}{p-q}}dx$.

Заметим теперь, что доказательство неравенств (1) и (2) базировалось на свойствах функции $\varphi(s)=\frac{\left(a+b\cdot s^p\right)^q}{\left(u+v\cdot s^q\right)^p}\,(0\le s<\infty)$, т.е. при $1<q<p<\infty$ эта функция достигала своего максимального значения в точке $s=\left(\frac{a\cdot v}{b\cdot u}\right)^{\frac{1}{p-q}}$.

Исследование функции

$$\varphi(s)=\frac{\left(a_1+b_1\cdot s^{p_1}\right)^{q_1}\cdot\left(a_2+b_2\cdot s^{p_2}\right)^{q_2}}{\left(u_1+v_1\cdot s^{q_1}\right)^{p_1}\cdot\left(u_2+v_2\cdot s^{q_2}\right)^{p_2}}$$

и ее обобщений вида

$$\varphi(s)=\frac{\left(a_1+b_1\cdot s^{p_1}\right)^{q_1}\cdot\left(a_2+b_2\cdot s^{p_2}\right)^{q_2}\cdot\ldots\cdot\left(a_n+b_n\cdot s^{p_n}\right)^{q_n}}{\left(u_1+v_1\cdot s^{q_1}\right)^{p_1}\cdot\left(u_2+v_2\cdot s^{q_2}\right)^{p_2}\cdot\ldots\cdot\left(u_n+v_n\cdot s^{q_n}\right)^{p_n}} \qquad (19)$$

является более трудной задачей, но при выполнении условия (20)

$$\left(\frac{a_1\cdot v_1}{b_1\cdot u_1}\right)^{\frac{1}{p_1-q_1}}=\left(\frac{a_2\cdot v_2}{b_2\cdot u_2}\right)^{\frac{1}{p_2-q_2}}=\ldots=\left(\frac{a_n\cdot v_n}{b_n\cdot u_n}\right)^{\frac{1}{p_n-q_n}} \qquad (20)$$

и условия (21)

$$1<q_j<p_j<\infty(1\le j\le n) \qquad (21)$$

точка s_*, в которой все множители вида $\varphi_j(s)=\frac{\left(a_j+b_j\cdot s^{p_j}\right)^{q_j}}{\left(u_j+v_j\cdot s^{q_j}\right)^{p_j}}$ достигают своего максимума, является одной и той же, и тогда минимум произведения (19) совпадает с произведением минимумов, т.е. имеет место неравенство (22):

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j+b_j\cdot s^{p_j}\right)^{q_j}}{\left(u_j+v_j\cdot s^{q_j}\right)^{p_j}}\le \max\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{q_j}}{u_j^{p_j}},\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j^{q_j}}{v_j^{p_j}}\right). \quad (22)$$

Из неравенства (22) сразу же получаем следующий результат:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{u_j^{p_j}}{a_j^{q_j}}\right)^{\frac{1}{p_j-q_j}}+\left(\frac{v_j^{p_j}}{b_j^{q_j}}\right)^{\frac{1}{p_j-q_j}}\right)^{q_j-p_j}\le$$

$$\le\prod_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j\left|x_j\right|^{p_j}+b_j\left|x_j\right|^{p_j}\right)^{q_j}}{\left(u_j\left|x_j\right|^{q_j}+v_j\left|x_j\right|^{q_j}\right)^{p_j}}\le \quad (23)$$

$$\le\max\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{q_j}}{u_j^{p_j}},\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j^{q_j}}{v_j^{p_j}}\right).$$

Заметим, что неравенства (23) справедливы при выполнении условий (20) и (21).

В случае произведения $\prod_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j+b_j\cdot s^{p_j}\right)^{q_j}}{\left(u_j+v_j\cdot s^{q_j}\right)^{p_j}}$ при выполнении условия

$\left(\frac{b_1\cdot u_1}{a_1\cdot v_1}\right)^{\frac{1}{p_1-q_1}}=\ldots=\left(\frac{b_n\cdot u_n}{a_n\cdot v_n}\right)^{\frac{1}{p_n-q_n}}$ и условия (21)

получаем следующее неравенство:

$$\min\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{q_j}}{u_j^{p_j}},\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j^{q_j}}{v_j^{p_j}}\right)\le\prod_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j+b_j\cdot s^{q_j}\right)^{p_j}}{\left(u_j+v_j\cdot s^{p_j}\right)^{q_j}}\le$$

$$\le\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{a_j^{q_j}}{u_j^{p_j}}\right)^{\frac{1}{p_j-q_j}}+\left(\frac{b_j^{q_j}}{v_j^{p_j}}\right)^{\frac{1}{p_j-q_j}}\right)^{p_j-q_j}. \quad (24)$$

Из неравенства (24) следует неравенство (25):

$$\min\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{q_j}}{u_j^{p_j}},\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j^{q_j}}{v_j^{p_j}}\right)\le$$

$$\le\prod_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j\left|x_j\right|^{q_j}+b_j\left|x_j\right|^{q_j}\right)^{p_j}}{\left(u_j\left|x_j\right|^{p_j}+v_j\left|x_j\right|^{p_j}\right)^{q_j}}\le \quad (25)$$

$$\le\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{a_j^{q_j}}{u_j^{p_j}}\right)^{\frac{1}{p_j-q_j}}+\left(\frac{b_j^{q_j}}{v_j^{p_j}}\right)^{\frac{1}{p_j-q_j}}\right)^{p_j-q_j}.$$

Заключение. В результате проведенного исследования были доказаны неравенства (1) и (2), их интегральные аналоги. Исследованы некоторые частные случаи доказываемых неравенств. Изучены свойства функций (5) и (6), на основе которых базировалось доказательство исследуемых неравенств.

Представляется, что рассматриваемые вопросы могут быть полезны с точки зрения преподавания математики, в том числе и как интересные иллюстрации связи ее различных разделов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Городецкий, В.В. Решение задач по функциональному анализу / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – Киев: Выща школа, 1990. – 479 с.
2. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: Университетское, 1984. – 351 с.
3. Харди, Г.Г. Неравенства / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литлвуд, Г. Полиа. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.
4. Соболев, С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1969. – 254 с.

R E F E R E N C E S

1. Gorodetsky V.V., Nagnibida N.I., Nastasiyev P.P. *Resheniye zadach po funktsionalnomu analizu* [Solving Tasks on Functional Analysis], Kyiv, Vyshcha shkola, 1990, 479 p.
2. Antonevich A.B., Radino Ya.V. *Funktsionalnii analiz i integralniye uravneniya* [Functional Analysis and Integral Equations], Minsk, Universitetskoye, 1984, 351 p.
3. Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G. *Neravenstva* [Inequalities], M., IL, 1948, 456 p.
4. Sobolev S.L. *Izbranniye voprosi teorii funktsionalnikh prostranstv i obobshchennikh funktsii* [Selected Issues of Theory of Functional Spaces and Generalized Functions], M., Nauka, 1969, 254 p.

Поступила в редакцию 13.09.2016

Адрес для корреспонденции: e-mail: k.yakuto@mail.ru – Якуто К.Л.