$$[x\,K^{n-1}] = [H^{r-1}\,x\,K^{n-r}].$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если n-арные подгруппы < H, ( ) > и < K, ( ) > n-арной группы < A, ( ) > m-полусопряжены посредством некоторого элемента $x \in A$, то посредством этого же элемента они и r-полусопряжены, где*

$$r - 1 = (m - 1,\ n - 1).$$

Доказательство. По определению m-полусопряженные подгруппы являются полусопряженными, а значит, и n-полусопряженными. Теперь применяем теорему 2. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если n-арные подгруппы < H,( ) > и < K, ( ) > n-арной группы < A, ( ) > m-полусопряжены и k-полусопряжены посредством одного и того же элемента и (m - 1, k - 1) = 1, то они сопряжены в < A, ( ) > посредством того же элемента.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. V. 48. №2. P. 208-350.
2. ***Гальмак А.М.*** Инвариантные подгруппы n-арных групп и их обобщения // Вопросы алгебры. Вып. 5. Мн.: Университетское, 1990. С. 91-94.
3. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Минск: Навука і тэхніка, 1992. С. 18, 246.
4. ***Воробьев Г.Н.*** К вопросу о сопряженности n-арных подгрупп в n-рной группе. //Материалы республиканской научно-методической конференции, посвященной 25-летию факультета прикладной математики и информатики. Часть II: Минск 1995. С.121.
5. ***Воробьев Г.Н.*** О сопряженности n-арных подгрупп // Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. 1996. №1. С. 121.

SUMMARY

This paper introduces and studies the conception of m-semiconjigation of n-ary subgroups in the n-ary group.

УДК 512.542

И. В. Дудкин

Классы Фиттинга, определяемые подгруппами Холла

Классическими объектами исследования в теории групп являются подгруппы Холла. Если π - некоторое множество простых чисел, то подгруппой Холла или холловской π-подгруппой называется такая подгруппа G_π группы G порядок которой есть π-число, а индекс π'-число. В последние два десятилетия ряд известных результатов теории групп был посвящен построению новых классов конечных разрешимых групп, определяемых подгруппами Холла и исследованию структуры самих групп посредством таких классов.

В 1973 году Локетт [1] определяет и описывает класс групп, $\mathfrak{F}$ -иньекторы которых содержат некоторую холловскую π-подгруппу этих групп, где

$\mathfrak{F}$ - класс Фиттинга, то есть класс групп замкнутых относительно нормальных подгрупп и их произведений. Бризон [2] определил класс групп $K_\pi(\mathfrak{F})$, холловская π-подгруппа которых является $\mathfrak{F}$ - группой, доказал, что такой класс является классом Фиттинга и описал посредством такого класса $\mathfrak{F}$-радикалы подгрупп Холла. Аналогичные исследования проводились и в теории формаций конечных групп. Л.А.Шеметковым [3] была сформулирована следующая проблема: является ли формация всех групп, каждая из которых обладает классом сопряженных холловских подгрупп, принадлежащих локальной формации $\mathfrak{X}$, локальной? Основным результатом настоящей работы является положительный ответ на проблему Шеметкова в теории классов Фиттинга. Все факты, которые мы не приводим можно найти в монографии [3], а также в [4] и [5]. Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы..

Лемма 1. [2] Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ классы Фиттинга, и π - множество простых чисел, тогда верны следующие утверждения:

а) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $K_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq K_\pi(\mathfrak{X})$

б) $K_\pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}) = K_\pi(\mathfrak{F}) \cap K_\pi(\mathfrak{X})$

в) $K_\pi(\mathfrak{F}) = S_{\pi'} K_\pi(\mathfrak{F}) S_{\pi'}$

Лемма 2. [2] Пусть $\mathfrak{F}$-класс Фиттинга, π-множество простых чисел, G-группа и G_π ее холловская π-подгруппа. Тогда: $G_{K\pi(\mathfrak{F})} \cap G_\pi = (G_\pi)_\mathfrak{F}$.

Лемма 3. [2] Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ классы Фиттинга, а π - множество простых чисел, тогда $K_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) = K_\pi(\mathfrak{F})K_\pi(\mathfrak{X})$.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F}$-класс Фиттинга, π-множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $p \in \pi$, то $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_{p'}$

б) если $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$ для некоторого простого p, то $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = K_\pi(\mathfrak{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Заметим, что $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_\pi(\mathfrak{S}_{p'})$ так как класс $\mathfrak{S}_{p'}$ наследственнен. Пусть $G \in K_\pi(\mathfrak{S}_{p'})$. Тогда $|G_\pi| \in p'$ и $|G:G_\pi| \in \pi'$. Но из $p \in \pi$, следует, что $\pi' \subseteq P'$. Значит G является p'-группой. Отсюда $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) \subseteq \mathfrak{S}_{p'}$ и поэтому $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_{p'}$. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Очевидно, что $K_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$. Покажем, что $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть G - группа из $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$. Тогда $G/G_{K\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{N}_p$. Пусть G_π - холловская π-подгруппа группы G. Тогда холловская π-подгруппа $G_\pi G_{K\pi(\mathfrak{F})}/G_{K\pi(\mathfrak{F})}$ группы $G/G_{K\pi(\mathfrak{F})}$ является p-группой. Но - $G_\pi G_{K\pi(\mathfrak{F})}/G_{K\pi(\mathfrak{F})} \cong G_\pi / G_\pi \cap G_{K\pi(\mathfrak{F})}$. По лемме 2 $G_\pi \cap G_{K\pi(\mathfrak{F})} = (G_\pi)_\mathfrak{F}$. Следовательно, $G_\pi / (G_\pi)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому $G_\pi \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$. Значит, $G \in K\pi(\mathfrak{F})$ и $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$.

Лемма доказана.

Теорема. Если $\mathfrak{F}$-локальный класс Фиттинга и π - некоторое множество простых чисел, то $K_\pi(\mathfrak{F})$ -локальный класс Фиттинга.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\omega \cap (\cap_{p\in\omega} \varphi(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, где φ-полная внутренняя Н-функция и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Построим Н-функцию следующим образом:

$$f(p)=\begin{cases} K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p)), \text{ если } p\in\pi\cap\omega \\ K_\pi(\mathfrak{F}), \text{ если } p\in\pi' \\ \varnothing, \text{ если } p\in\pi\backslash\omega \end{cases}$$

Тогда $LR(f) = \mathfrak{S}_{\pi' \cup (\pi\cap\omega)} \cap (\cap_{p\in\pi\cap\omega} K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \cap (\cap_{p\in\pi'} K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Рассмотрим класс $\cap_{p\in\pi\cap\omega} K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Так как $\mathfrak{F}$- локальный класс Фиттинга и Н-функция φ - полная внутренняя, то $\mathfrak{F} \subseteq \varphi(p)\mathfrak{S}_{p'}$ для любого p из $\pi\cap\omega$. Значит $\mathfrak{F} \subseteq \cap_{p\in\pi\cap\omega} \varphi(p)\mathfrak{S}_{p'}$. По лемме 1а) $K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F}) \subseteq \cap_{p\in\pi\cap\omega} K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p)\mathfrak{S}_{p'})$. По лемме 3 и 4а) получаем $K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\subseteq\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{S}_{p'}$. Но по лемме 4б) $K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\subseteq\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Покажем теперь, что $\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\subseteq K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Действительно, $\varphi(p)\subseteq\mathfrak{F}$ для любого простого p, так как φ -внутренняя H-функция. По лемме 1а) $K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\subseteq K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Значит $K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{S}_{p'}\subseteq K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'}$ для любого p из $\pi\cap\omega$. Тогда $\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{S}_{p'}\subseteq\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'}$. По лемме 3в) $\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{S}_{p'}=\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Значит, $\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\subseteq\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'}=K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(\pi\cap\omega)'}=K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Итак, получаем $\bigcap_{p\in\pi\cap\omega}K_{\pi\cap\omega}(\varphi(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}=K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$.

Рассмотрим класс Фиттинга $\bigcap_{p\in\pi'}K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. По лемме 1в) $K_\pi(\mathfrak{F})=K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}$. Но $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_p=\mathfrak{S}_{\pi'}$ для p из π'. Следовательно, $\bigcap_{p\in\pi'}K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}=\bigcap_{p\in\pi'}K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}=\bigcap_{p\in\pi'}K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_{p'}=\bigcap_{p\in\pi'}K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'}=K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi$.

Таким образом, мы установили, что $LR(f)=\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}\cap K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\cap K_\pi(\mathfrak{F})S_\pi$. Покажем теперь, что $\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}\cap K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})=K_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$, тогда $G_\pi\in\mathfrak{F}$. Но $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}_\omega$, значит, $|G_\pi|\in\pi\cap\omega$. Так как $|G:G_\pi|\in\pi'$, то $|G|\in\pi'\cup(\pi\cap\omega)$. Итак, $G\in\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}$, и $K_\pi(\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}$. Так как $\pi'\subseteq(\pi\cap\omega)'$, то π–холловская подгруппа G_π группы G является также $(\pi\cap\omega)$-холловской подгруппой группы G. Значит, $G\in K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$ и $K_\pi(\mathfrak{F})\subseteq K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Итак, получаем $K_\pi(\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}\cap K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Пусть теперь $G\in\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}\cap K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Тогда $|G|\in\pi'\cup(\pi\cap\omega)$ и $G_{\pi\cap\omega}\in\mathfrak{F}$. Индекс подгруппы $G_{\pi\cap\omega}$ в группе G не содержит простых чисел из $\pi\backslash(\pi\cap\omega)$ так как в противном случае $|G|\notin\pi'\cup(\pi\cap\omega)$. Значит, $|G:G_{\pi\cap\omega}|\in\pi'$. Таким образом, $(\pi\cap\omega)$-холловская подгруппа группы G является также ее π-холловской подгруппой. Значит, $G_\pi\in\mathfrak{F}$ и $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$. А это означает, что $\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}\cap K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$. Итак, мы доказали, равенство $\mathfrak{S}_{\pi'\cup(\pi\cap\omega)}\cap K_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})=K_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $LR(f)=K_\pi(\mathfrak{F})\cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi=K_\pi(\mathfrak{F})$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Locket F. P.*** On the theory of Fitting classes of finite soluble groupse. // Math. Z. 1973. Bd. 131, N3. P. 103-115.
2. ***Brison O. J.*** Hall operators for Fitting classes // Arch. Math. Vol. 33, 1979.
3. ***Шеметков Л. А.*** Формации конечных групп. М. Наука,1978.
4. ***Воробьев Н. Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. Ж.. -1996.-Т. 37, N6.
5. ***Воробьев Н. Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локкета // Матем. заметки. -1988.-Т. 43, вып. 2.

S U M M A R Y

In this paper it is proved that if $\mathfrak{F}$ is a lokal Fitting class, then a class of all thouse soluble groups in which Hall's π-subgroup is a $\mathfrak{F}$-groups, is a lokal Fitting class. Besides a H-function of such Fitting class is described.