13. **Skiba A.N., Vorobyov N.N.** On Boolean lattices of n -multilocal Fitting classes. - Preprint / Gomel State University. - Gomel, 1997. - N62. - 12 p.

S U M M A R Y

It is proved that every ω-local formation (ω-local Fitting class) represented in the form of direct decomposition is local if and only if every component of this direct decomposition is local.

УДК 512.542

Ю. В. Кравченко

Дополняемость факторов в теореме Жордана-Гельдера для полиадических мультиколец

При изучении алгебраических систем любых типов обычно используют два подхода. Первый из них связан с анализом тождеств, выполнимых в данной системе. Второй подход заключается в изучении различных свойств подсистем исследуемой алгебраической системы. В работах, относящихся к этому направлению, важное место занимают аналоги теоремы Жордана-Гельдера о изоморфизмах главных рядов.

Целью данной работы является дальнейший анализ этой теоремы в классе полиадических мультиколец в смысле следующего определения. Полиадическим мультикольцом будем называть универсальную алгебру А сигнатуры $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$, $n \geq 2$ такую, что: 1) *A* является *n*-арной группой относительно операции ω_n ; 2) все операции из Ω имеют ненулевую арность и связаны с ω_n дистрибутивным законом; 3) для элемента $\varepsilon \in A$ выполняются равенства: $(\overset{i-1}{\varepsilon}, x, \overset{n-i}{\varepsilon})\omega_n = x$ и $(a_1^{i-1}, \varepsilon, a_{i+1}^m)\sigma = \varepsilon$, где $x, a_1, \ldots, a_m \in A$, $\sigma_m \in \Omega$.

Заметим, что такое определение полиадического мультикольца одновременно охватывает восходящее к [1,2] понятие *n*-арной группы (в случае, когда $\Omega = \varnothing$) и понятие мультикольца (в случае, когда ω_n – бинарная операция, т.е. $n = 2$), исследуемое в [3] (в книге [3] мультикольца были названы мультиоператорными кольцами). Поэтому следствиями нижеприведенных утверждений являются соответствующие результаты книги [4] и, кроме того, некоторые новые наблюдения о *n*-арных группах.

Основные определения и обозначения взяты из [4].

Все рассматриваемые полиадические мультикольца имеют одну и ту же сигнатуру $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$ и принадлежат некоторому фиксированному мальцевскому многообразию, удовлетворяющему условиям минимальности и максимальности для подалгебр.

Если H и K – подалгебры полиадического мультикольца *A*, то обозначим $(H, \overset{n-1}{K})\omega_n = H{\cdot}K$.

Через $\tau(K)$ обозначим совокупность всех минимальных идеалов полиадического мультикольца K.

Проверка показывает, что справедлива следующая

Лемма 1. Пусть π – произвольная непустая совокупность минимальных полиадических мультиколец, K и N – идеалы полиадического мультикольца A, причем $K \subseteq N$. Тогда если N π-разрешим (π-нильпотентен) в A, то и K π-разрешим (π-нильпотентен) в A.

Лемма 2. Пусть N – A-абелев идеал полиадического мультикольца A. Тогда если всякий минимальный идеал A, входящий в N, нефраттиниев, то N дополняем в A и $N \subseteq \mathrm{Soc}(A)$. Если, кроме того, N – наибольший A-абелев идеал A и идеал $C = C_A(N)$ разрешим в A, то $C = N$.

Доказательство. Пусть цепь

$$\{\varepsilon\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_t = N$$

идеалов полиадического мультикольца A такова, что N_i / N_{i-1} – минимальный идеал в A/N_{i-1} для всякого $i \in \{1,..., t\}$. Первые два утверждения леммы будем доказывать индукцией по t. Покажем прежде, что идеал N дополняем в A. Так как по условию идеал N нефраттиниев, то в A найдется такая собственная подалгебра K, что $A = N_1 \cdot K$. Легко видеть, что $E = N_1 \cap K$ – идеал в A. При этом очевидно, что $K \cap N_1 \neq N_1$. Следовательно, поскольку N_1 – минимальный идеал A, то $K \cap N_1 = \{\varepsilon\}$, т.е. K – дополнение к N_1 в A.

Предположим теперь, что $t > 1$ и идеал N_{t-1} дополняем в A подалгеброй R. Пусть $D = N \cap R$. Нетрудно показать, что D – минимальный идеал A. Следовательно, D обладает дополнением F в A. Пусть $T = R \cap F$. Покажем, что T – дополнение к N в A. Заметим прежде, что

$$N_{t-1} \cdot D = N_{t-1} \cdot (N \cap R) = N \cap R \cdot N_{t-1} = N \cap A = N.$$

Значит,

$$N \cdot T = N_{t-1} \cdot D \cdot (R \cap F) = N_{t-1} \cdot (R \cap D \cdot F) = \\ = N_{t-1} \cdot (R \cap A) = N_{t-1} \cdot R = A$$

С другой стороны,

$$N \cap (R \cap F) = D \cap F = \{\varepsilon\}.$$

Этим самым завершено доказательство первого утверждения леммы. Второе утверждение леммы по существу установлено в ходе доказательства первого. Действительно, по индукции $N_{i-1} \subseteq \mathrm{Soc}(A)$ и $N = N_{i-1} \cdot D$. Значит, $N \subseteq \mathrm{Soc}(A)$.

Докажем теперь третье утверждение леммы. Пусть L – дополнение к N в A. Тогда

$$C = C \cap N \cdot L = N \cdot (C \cap L).$$

Понятно, что $P = C \cap L$ – идеал в A. Ввиду леммы 1 идеал P разрешим в A. Значит, если $P \neq \{\varepsilon\}$, то A имеет такой A-абелев идеал T, что $\{\varepsilon\} \neq T \subseteq P$. Так как $T \cap N = \{\varepsilon\}$, то $T \cdot N$ – A-абелев идеал A и $N \subseteq T \cdot N$. Полученное противоречие показывает, что $P = \{\varepsilon\}$, т.е. $N = C$. Лемма доказана.

Пусть H/K – нефраттиниев A-абелев главный фактор полиадического мультикольца A, $C = C_A(H/K)$. Обозначим через R пересечение всех таких идеалов N из A, что $N \subseteq C$, причем фактор C/N нефраттиниев и проективен фактору H/K. Фактор C/R назовем короной, соответствующей фактору H/K (или, иначе, H/K-короной полиадического мультикольца A).

Лемма 3. Пусть A – полиадическое мультикольцо, обладающее главными рядами, H/K – его A-абелев нефраттиниев главный фактор и C/R – H/K-корона полиадического мультикольца A. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) $C/R \subseteq \mathrm{Soc}(A/R)$;

2) идеал C/R дополняем в A/R;

3) если B/P – главный фактор A, то включения $R{\cdot}P \subset R{\cdot}B \subseteq C$ имеют место в точности тогда, когда фактор B/P нефраттиниев и проективен фактору H/K.

Полиадическое мультикольцо A назовем φ-разрешимым, если оно обладает главным рядом и каждый его фраттиниев главный фактор A-абелев. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ φ-разрешим, если φ-разрешимо любое полиадическое мультикольцо из $\mathfrak{F}$.

Серию конкретных примеров φ-разрешимых полиадических мультиколец составляют конечные группы, алгебры Ли конечной длины, конечномерные алгебры Мальцева характеристики $\neq 2$.

Теорема. Пусть A – φ-разрешимое полиадическое мультикольцо. Тогда между факторами произвольных двух главных рядов A можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H/K – главный фактор A. Согласно теореме Жордана-Гельдера в любом главном ряде полиадического мультикольца A содержится одно и то же число факторов, проективных фактору H/K. Значит, нам достаточно установить, что в любых двух главных рядах A содержится по одинаковому числу нефраттиниевых факторов, проективных фактору H/K. Если фактор H/K не является A-абелевым, то ввиду того, что $K \subseteq C_A(H/K)$ в каждом главном ряде A имеется лишь один фактор, проективный фактору H/K. Ввиду условия все такие факторы нефраттиниевы. Пусть фактор H/K A-абелев. Предположим, что A имеет нефраттиниев главный фактор T/M, проективный фактору H/K. Пусть C/R есть T/M-корона. Тогда ввиду утверждения 3) леммы 3 в каждом главном ряде полиадического мультикольца A имеется точно t нефраттиниевых факторов, проективных фактору H/K, где t - длина участка главного ряда A, заключенного между R и C. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. - 1940. - Vol.48, № 2. - P.208-350.
2. ***Dörnte W.*** Untersuchungen über linen varallgemeinerten Gruppenbegriff // Math.Z. - 1928. - Bd.29. - S.1-19.
3. ***Скорняков Л.А.*** Элементы общей алгебры. - М.: Наука, 1983.-272 с.
4. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. - М.: Наука, 1989. - 256 с.

S U M M A R Y

This represent further analysis Jordan-Holder theorem in class of polyadic multirings.