

## О прямых разложениях $\omega$ -локальных формаций и классов Фиттинга

Все рассматриваемые нами группы конечны. Используется стандартная терминология [1,2] и определения и обозначения, введенные в работе [3].

После выхода в 1981 г. работы А.Н.Скибы [4] началось изучение дополняемых подформаций [5-9], что привело к следующей полезной конструкции [10]: для произвольной системы классов  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  такой, что  $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$  для всех различных  $i, j \in I$  через  $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$  обозначается совокупность всех групп вида  $A_1 \times \dots \times A_t$ , где  $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$  для некоторых  $i_1, \dots, i_t \in I$ . Всякое представление класса групп  $\mathfrak{F}$  в виде  $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$  называется прямым разложением этого класса. В неявном виде такая конструкция использовалась в [9,11] (см. также [12], с. 670). В работе А.Н.Скибы [10] было начато изучение прямых разложений  $n$ -кратно локальных формаций. В частности, там было доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций,  $n$ -кратно локальна тогда и только тогда, когда  $n$ -кратно локальна каждая из компонент этого разложения. Аналог этого результата для  $n$ -кратно локальных классов Фиттинга получен в работе [13]. Целью данной заметки является изучение прямых разложений  $\omega$ -локальных формаций и классов Фиттинга.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ , где  $\mathfrak{F}_i$  – формация. Тогда формация  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локальна в том и только в том случае, когда  $\omega$ -локальна каждая из формаций  $\mathfrak{F}_i$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточность. Пусть каждая из формаций  $\mathfrak{F}_i$   $\omega$ -локальна,  $f_i$  – ее минимальный  $\omega$ -локальный спутник,  $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$ . Тогда если  $i \neq j$ , то, по условию,  $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ . Значит,  $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ . Строим  $\omega$ -локальный спутник  $f$  такой, что  $f(\omega') = \mathfrak{F}$  и  $f(p) = f_i(p)$ , если  $p \in \pi_i$  для некоторого  $i \in I$ , и  $f(p) = \emptyset$ , если  $p \in \omega \setminus \bigcup_{i \in I} \pi_i$ . Покажем, что  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ .

Пусть  $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$  и  $G$  – группа минимального порядка из  $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа и ее монолит  $R = G^\mathfrak{F}$ . Поскольку  $G \in LF_\omega(f)$ , то  $G/F_p(G) \in f(p)$  для всех  $p \in \omega \cap \pi(G)$ . Следовательно, если  $p \in \omega \cap \pi(G)$ , то  $G/F_p(G) \in f(p) \neq \emptyset$ . Значит, найдется такое  $i \in I$ , что  $p \in \pi_i$ . Отсюда  $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i$ .

Если  $\omega \cap \pi(R) = \emptyset$ , то  $G_{\omega d} = 1$ . Значит,

$$G \cong G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

**Противоречие.** Следовательно,  $\omega \cap \pi(R) \neq \emptyset$ . Пусть  $p \in \omega \cap \pi(R)$ . Тогда  $p \in \pi_i$  для некоторого  $i \in I$ . Если  $R$  – неабелева группа, то  $F_p(G) = 1$ . Поэтому

$$G \cong G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

**Противоречие.**

Пусть  $R$  –  $p$ -группа. Значит,  $R = C_G(R) = F_p(G) = O_p(G)$ . Но тогда  $G/F_p(G) = G/R \in f(p) = f_i(p)$ . Значит, по лемме 4[3]  $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ . Противоречие. Таким образом,  $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$ .

Допустим, что обратное включение неверно и  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus LF_{\omega}(f)$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа. Поэтому найдется такое  $i \in I$ , что  $G \in \mathfrak{F}_i = LF_{\omega}(f_i)$ . Значит,  $G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p)$  и из того, что  $G \in \mathfrak{F}$  получаем  $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$  для всех  $p \in \omega \cap \pi(G)$ . Следовательно,  $G \in LF_{\omega}(f)$ . Значит,  $\mathfrak{F} \subseteq LF_{\omega}(f)$ . Таким образом,  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$  –  $\omega$ -локальная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локальна и  $f$  – ее минимальный  $\omega$ -локальный спутник. Пусть  $i \in I$  и  $f_i$  – такой  $\omega$ -локальный спутник, что  $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$  и  $f_i(p) = f(p)$ , если  $p \in \pi_i$  и  $f_i(p) = \emptyset$ , если  $p \in \omega \setminus \pi_i$ . Покажем, что  $\mathfrak{F}_i = LF_{\omega}(f_i)$ .

Предположим, что  $\mathfrak{F}_i$  не входит в  $LF_{\omega}(f_i)$  и  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F}_i \setminus LF_{\omega}(f_i)$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $R = G^{LF_{\omega}(f_i)}$ . Поскольку  $G \notin LF_{\omega}(f_i)$ , то согласно лемме 9[3], либо  $G^{\mathfrak{F}_i} \subseteq G_{\omega d}$ , либо найдется такое  $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}_i})$ , что  $G/F_p(G) \notin f_i(p)$ . Но  $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ . Значит,  $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$  и для всех  $q \in \omega \cap \pi(G)$  имеет место  $G/F_q(G) \in f(q) = f_i(q)$ . То есть  $G \in LF_{\omega}(f_i)$ . Противоречие. Итак,  $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_{\omega}(f_i)$ .

Допустим, что обратное включение неверно, и  $G$  – группа минимального порядка из  $LF_{\omega}(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $R = G^{\mathfrak{F}_i}$ .

Пусть  $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$ . Тогда из  $G \in LF_{\omega}(f_i)$  следует, что  $G/F_p(G) \in f_i(p)$ . Значит,  $f_i(p) \neq \emptyset$  и по построению  $\omega$ -локального спутника  $f_i$  имеем  $p \in \pi_i$ . Итак,  $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$ .

Кроме того, по построению  $\omega$ -локального спутника  $f_i$  справедливо  $f_i \leq f$ . Значит,  $G \in \mathfrak{F}$ . Поэтому, ввиду монолитичности группы  $G$ , найдется такое  $j \in I$ , что  $G \in \mathfrak{F}_j$ . Тогда  $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_j$ . Поэтому

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \emptyset.$$

Значит,  $i = j$ , т.е.  $G \in \mathfrak{F}_i$ . Противоречие. Следовательно,  $LF_{\omega}(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$ . Таким образом,  $\mathfrak{F}_i = LF_{\omega}(f_i)$  –  $\omega$ -локальная формация.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ , где  $\mathfrak{F}_i$  – класс Фиттинга. Тогда класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локален в том и только в том случае, когда  $\omega$ -локален каждый класс Фиттинга  $\mathfrak{F}_i$ .

**Доказательство.** Пусть класс Фиттинга  $\mathfrak{F}_i$   $\omega$ -локален и  $f_i$  – его минимальная  $\omega$ -локальная  $H$ -функция для любого  $i \in I$ ,  $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$ . Тогда, если  $i \neq j$ , то по условию  $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ . Значит,  $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ . Построим  $\omega$ -локальную  $H$ -функцию  $f$  таким образом, что  $f(\omega') = \mathfrak{F}$  и  $f(p) = f_i(p)$  для всех  $p \in \pi_i$  и некоторого  $i \in I$ , и  $f(p) = \emptyset$ , если  $p \in \omega \setminus \bigcup_{i \in I} \pi_i$ . Покажем, что  $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$ .

Пусть  $G$  – группа минимального порядка из  $LR_{\omega}(f) \setminus \mathfrak{F}$ . Тогда  $G$  – комонолитическая группа,  $M = G_{\mathfrak{F}}$  – ее комонолит. Предположим, что  $\omega \cap \pi(G/M) = \emptyset$ . Тогда  $G^{\omega d} = G$ . Но  $G \in LR_{\omega}(f)$ , значит,  $G^{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}$ . Противоречие. Следовательно,  $\omega \cap \pi(G/M) \neq \emptyset$ . Пусть  $p \in \omega \cap \pi(G/M)$ . Значит,  $G^{Sp'} = G$ . Поэтому  $F^p(G) = O^p(G)$ . Если  $G/M$  – неабелева группа, то  $F^p(G) = G$ . Но  $F^p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ . Противоречие. Значит,  $G/M$  –  $p$ -группа. В этом случае получаем  $F^p(G) = O^p(G) \in f(p) = f_i(p)$ . Отсюда по лемме 23[3]  $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ . Противоречие. Таким образом, справедливо включение  $LR_{\omega}(f) \subseteq \mathfrak{F}$ .

Допустим, что обратное включение неверно и  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus LR_{\omega}(f)$ . Тогда  $G$  – комонолитическая группа. Следовательно, найдется такое  $i \in I$ , что  $G \in \mathfrak{F}_i = LR_{\omega}(f_i)$ . Значит,  $F^p(G) \in f_i(p) = f(p)$  для всех

$p \in \omega \cap \pi(G)$ . Кроме того, из  $G \in \mathfrak{F}$  и из того, что  $G^{\omega d}$  нормальна в  $G$ , получаем  $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ . Поэтому  $G \in LR_{\omega}(f)$ . Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{F} \subseteq LR_{\omega}(f)$ . Таким образом,  $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга.

Пусть теперь класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локален и  $f$  – его минимальная  $\omega$ -локальная  $H$ -функция. Пусть  $i \in I$ ,  $f_i$  – такая  $\omega$ -локальная  $H$ -функция, что  $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$ ,  $f_i(p) = f(p)$ , если  $p \in \pi_i$  и  $f_i(p) = \emptyset$ , если  $p \in \omega \setminus \pi_i$ . Покажем, что  $\mathfrak{F}_i = LR_{\omega}(f_i)$ .

Предположим, что  $\mathfrak{F}_i$  не входит в  $LR_{\omega}(f_i)$  и  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F}_i \setminus LR_{\omega}(f_i)$ . Тогда  $G$  – комонолитическая группа и  $M = G_{LR_{\omega}(f_i)}$  – ее комонолит. Поскольку  $G \notin LR_{\omega}(f_i)$ , то по лемме 28[3] либо  $G^{\omega d} \notin G_{\mathfrak{F}_i}$ , либо найдется такое  $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{F}_i})$ , что  $F^p(G) \notin f_i(p)$ . Но  $G \in \mathfrak{F}_i$  и  $G^{\omega d}$  нормальна в  $G$ . Значит,  $G^{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$ . Кроме того, из того, что  $G \in \mathfrak{F}$  для всех  $q \in \omega \cap \pi(G)$  получаем  $F^q(G) \in f(q) = f_i(q)$ . Следовательно,  $G \in LR_{\omega}(f_i)$ . Противоречие. Значит, имеет место включение  $\mathfrak{F}_i \subseteq LR_{\omega}(f_i)$ .

Допустим, что обратное включение неверно и  $G$  – группа минимального порядка из  $LR_{\omega}(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$ . Тогда группа  $G$  комонолитична с комонолитом  $M = G_{\mathfrak{F}_i}$ . Из  $G \in LR_{\omega}(f_i)$  следует, что  $F^p(G) \in f_i(p)$ . Значит,  $f_i(p) \neq \emptyset$  и по построению  $\omega$ -локальной  $H$ -функции  $f_i$  получаем  $p \in \pi_i$ , т.е.  $\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i$  и, кроме того,  $f_i \leq f$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{F}$ . Ввиду комонолитичности группы  $G$  найдется такое  $j \in I$ , что  $G \in \mathfrak{F}_j$ . Тогда  $\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_j$ . Поэтому

$$\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i \cap \pi_j \neq \emptyset$$

Значит,  $i = j$ , т.е.  $G \in \mathfrak{F}_i$ . Противоречие. Следовательно,  $LR_{\omega}(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$ . Таким образом,  $\mathfrak{F}_i = LR_{\omega}(f_i)$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 273 с.
2. **Скиба А.Н., Шеметков Л.А.** Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
3. **Скиба А.Н., Шеметков Л.А.** Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. – Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины. – Гомель, 1997. – N 63. – 42 с.
4. **Скиба А.Н.** О формациях с заданными системами подформаций // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск, 1981. – С. 155-180.
5. **Ведерников В.А.** Вполне факторизуемые формации конечных групп // Вопр. алгебры. – Минск, 1990. – Вып. 5. – С. 28-34.
6. **Скиба А.Н.** О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Изв. вузов. Математика – 1994. – N10. – С. 75-80.
7. **Aniskov V.V., Skiba A.N.** On local formations with complemented local subformations. – Preprint / Gomel State University. – Gomel, 1993. – N5. – 10 p.
8. **Сафонов В.Г.** О кратно локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1996. – Вып. 9. – С. 112-127.
9. **Жевнова Н.Г., Скиба А.Н.**  $p$ -насыщенные формации с дополняемыми  $p$ -насыщенными подформациями // Изв. вузов. Математика – 1997. – N5. – С. 1-7.
10. **Скиба А.Н.** О дополняемых подформациях // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1996. – N9. – С. 55-62.
11. **Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н.** О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 27-54.
12. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

# S U M M A R Y

*It is proved that every  $\omega$ -local formation (  $\omega$ -local Fitting class) represented in the form of direct decomposition is local if and only if every component of this direct decomposition is local.*

УДК 512.542

Ю. В. Кравченко

## Дополняемость факторов в теореме Жордана-Гельдера для полиадических мультиколец

При изучении алгебраических систем любых типов обычно используют два подхода. Первый из них связан с анализом тождеств, выполнимых в данной системе. Второй подход заключается в изучении различных свойств подсистем исследуемой алгебраической системы. В работах, относящихся к этому направлению, важное место занимают аналоги теоремы Жордана-Гельдера о изоморфизмах главных рядов.

Целью данной работы является дальнейший анализ этой теоремы в классе полиадических мультиколец в смысле следующего определения. Полиадическим мультикольцом будем называть универсальную алгебру  $A$  сигнатуры  $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$ ,  $n \geq 2$  такую, что: 1)  $A$  является  $n$ -арной группой относительно операции  $\omega_n$ ; 2) все операции из  $\Omega$  имеют ненулевую арифность и связаны с  $\omega_n$  дистрибутивным законом; 3) для элемента  $\varepsilon \in A$  выполняются равенства:  $(\varepsilon, x, \varepsilon)_{\omega_n} = x$  и  $(a_1^{-1}, \varepsilon, a_{i+1}^m)_{\sigma} = \varepsilon$ , где  $x, a_1, \dots, a_m \in A$ ,  $\sigma_m \in \Omega$ .

Заметим, что такое определение полиадического мультикольца одновременно охватывает восходящее к [1,2] понятие  $n$ -арной группы (в случае, когда  $\Omega = \emptyset$ ) и понятие мультикольца (в случае, когда  $\omega_n$  – бинарная операция, т.е.  $n = 2$ ), исследуемое в [3] (в книге [3] мультикольца были названы мультиоператорными кольцами). Поэтому следствиями нижеприведенных утверждений являются соответствующие результаты книги [4] и, кроме того, некоторые новые наблюдения о  $n$ -арных группах.

Основные определения и обозначения взяты из [4].

Все рассматриваемые полиадические мультикольца имеют одну и ту же сигнатуру  $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$  и принадлежат некоторому фиксированному мальцевскому многообразию, удовлетворяющему условиям минимальности и максимальности для подалгебр.

Если  $H$  и  $K$  – подалгебры полиадического мультикольца  $A$ , то обозначим  $(H, K)_{\omega_n} = HK$ .

Через  $\tau(K)$  обозначим совокупность всех минимальных идеалов полиадического мультикольца  $K$ .

Проверка показывает, что справедлива следующая