УДК 512.542

Н.Т. Воробьев

О проблеме существования максимальных классов Фиттинга

У. Херцфельд [1] и А.Н. Скибой (см. монографию [2], пример 19.1) показано, что каждая неединичная локальная формация не имеет максимальных по включению подформаций. Проблема существования максимальных подклассов Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга была сформулирована Х.Лаушем в "Коуровской тетради" (см. [3], вопрос 9.18) и решена отрицательно автором [4]. В связи с этим А.Н. Скибой была сформулирована следующая

Проблема ("Коуровская тетрадь" [5], вопрос 13.50). Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?

В настоящей работе получен отрицательный ответ на указанный вопрос. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ называется максимальным подклассом Фиттинга класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$.

Определение 1 (предложено Л.А. Шеметковым). Отображение $f : \mathbb{P} \to$ {классы Фиттинга} называют функцией Хартли или Н-функцией.

Пусть $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\}$ – носитель Н-функции и $\mathrm{LR}(f) = \mathfrak{E}_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$.

Определение 2 (Хартли [6], Дарси [7]). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется локальным, если $\mathfrak{F} = \mathrm{LR}(f)$ для некоторой Н-функции f.

Легко видеть, что класс $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп и класс $\mathfrak{E}$ всех конечных групп являются локальными. Другие определения и обозначения в случае необходимости см. в [8-10]. Отрицательное решение указанной выше проблемы А.Н. Скибы дает

Теорема. *В локальном классе Фиттинга $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{E}\}$ существуют максимальные подклассы Фиттинга.*

Изложим кратко этапы доказательства теоремы. Вначале рассмотрим случай, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$. В этом случае мы будем использовать понятие фиттинговой пары для $\mathfrak{F}$ и ее свойства.

Пару (A, d) называют фиттинговой для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (см. IX.2.10. [10]), если A – абелева группа (возможно, бесконечная) и

$$d : \mathfrak{F} \to \bigcup\{\mathrm{Hom}\,(G,A) : G \in \mathfrak{F}\} \text{ —}$$

такое отображение, что образ d_G каждой группы G является гомоморфизмом G в A, удовлетворяющим следующим двум условиям:

1) $d_G = \alpha\, d_H$ для всех групп G и H и всех нормальных вложений α: $G \to H$;

2) $A = \{g\, d_G : g \in G\}$.

Процедура построения контрпримера в идейном плане восходит к известным результатам Блессеноля и Гашюца [11], относящимся к конструированию разрешимых нормальных классов Фиттинга, и состоит в построении специальной фиттинговой пары для $\mathfrak{F}$. Пусть p – фиксированное простое число, A – циклическая группа порядка p-1 и G – любая группа из $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathscr{L}$ некоторый главный ряд группы G. Пусть $\mathscr{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$ – множество всех главных p-факторов группы G и $\mathscr{M} \neq \varnothing$. Тогда каждый элемент $g \in G$ индуцирует автоморфизм α_g на M_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Пусть $n = \dim(M_i)$ и m – отображение группы автоморфизмов $A(M_i)$ группы M_i в группу невырожденных матриц $GL(M_i)$ порядка n с элементами a_{ij}, принадлежащими полю Галуа F_p, т.е. $\alpha_g m = ||a_{ij}||$. Пусть теперь h – такое отображение группы $GL(M_i)$ в мультипликативную группу F_p^x поля F_p, что

$$||a_{ij}||\, h = \det ||a_{ij}||.$$

Легко видеть, что h – гомоморфизм, и поэтому произведение d = mh является гомоморфизмом группы $A(M_i)$ в $A = F_p^x$. Итак,

$$\alpha_g\, mh = \alpha_g d = \det ||a_{ij}||.$$

Пусть $\alpha_g d = d_i^p(g)$ и $d_G^p(g) = \prod_{i=1}^{r} d_i^p(g)$ для всех $g \in G$.

Если $\mathscr{M} = \varnothing$, то положим $d_G^p(g) = 1$. Нетрудно заметить, что отображение $d_G^p : G \to A$ – гомоморфизм.

Пусть теперь p = 3. Можно показать, что пара (A, d), где $A = F_3^x$ и

$$d : \mathfrak{F} \to \bigcup \{\mathrm{Hom}(G, A)\},$$

удовлетворяет условию 1) определения фиттинговой пары для $\mathfrak{F}$. Пусть класс групп $\mathfrak{M} = (G \in \mathfrak{F} : d_G^3(G) = 1)$. Тогда, применяя теорему IX.2.11 [10], получаем, что $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга и $G_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Ker}(d_G)$. В дальнейшем максимальность $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ устанавливаем, используя тот факт, что $|G/G_{\mathfrak{M}}| \in \{1,2\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$, класс групп $\mathfrak{M}$ определим следующим образом: $G \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда G действует на своих элементах порядка 3^n как группа четных подстановок (n – произвольное натуральное). Используя результаты Камины [12], получаем, что $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга индекса 2 в классе $\mathfrak{F}$, т.е. $|G/G_{\mathfrak{F}}| = 2$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$, и максимальность $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ получаем из этого свойства.

В заключение заметим, что ввиду произвольности выбора натурального n следует, что в локальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}$ существует счетное множество максимальных подклассов Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Herzfeld U. C.*** Frattini classes of formations of finite groups // Boll. Un. Mat. Ital. 1988. Vol. B(7). P. 601-611.
2. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

3. ***Коуровская тетрадь*** (нерешенные вопросы теории групп). Институт математики СО АН СССР. Изд-е 11. 1990. - 125 с.
4. ***Воробьев Н.Т.*** О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга. // Докл. АН БССР. 1991. Т.35, № 6. - С. 485-487.
5. ***Коуровская тетрадь*** (нерешенные вопросы теории групп). Институт математики СО РАН. Изд-е 13. 1995. - 130 с.
6. ***Hartley B.*** On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193-207.
7. ***D'Arcy P.*** Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc. 1975. Vol. 20, № 1. P.25-32.
8. ***Воробьев Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов. // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37, № 6. - С.1296-1302.
9. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М.: Наука. 1978. - 272 с.
10. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite Solvable Groups // De Gruyter Exp. in Math. Vol.4. Berlin-New York, 1992/ - 891 p.
11. ***Blessenohl D., Gaschutz W.*** Uber normale Schunk und Fittingklassen // Math. Z. 1970. Bd. 148, № 1. S. 1-8.
12. ***Camina A.R.*** A note on Fitting Classes // Math. Z. 1974. Bd. 136, № 4. S. 351-352.

S U M M A R Y

It is proved that in the local class Fitting exists a maximal subclass Fitting.

УДК 512.542

М.В. Селькин

Классы Шунка-Ферстера

Все рассматриваемые группы являются конечными.

Класс $\mathfrak{X}$ называется классом Шунка [1], если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{X}$ также принадлежит $\mathfrak{X}$; 2) из того, что $G/\mathrm{Core}_G(M)\in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G , всегда следует $G\in \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то максимальная подгруппа M группы G называется: 1) $\mathfrak{X}$ -нормальной, если $G/\mathrm{Core}_G(M)\in \mathfrak{X}$; 2) $\mathfrak{X}$-абнормальной, если $G/\mathrm{Core}_G(M)$ не входит в $\mathfrak{X}$. Нормальный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$-центральным, если $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$-эксцентральным, если $[H/K](G/C_G(H/K))\notin\mathfrak{X}$. Группа G называется примитивной, если она обладает маскимальной подгруппой M с $\mathrm{Core}_G(M)=1$. Остальные определения и обозначения можно найти в [2]. Известно (см. работу Бэра [3]), что множество $\mathcal{P}$ всех примитивных групп разбивается в объединение трех попарно непересекающихся множеств $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, где $\mathcal{P}_1$ – класс примитивных монолитических групп с абелевым монолитом, $\mathcal{P}_2$ – класс примитивных монолитических групп с неабелевым монолитом, $\mathcal{P}_3$ – класс примитивных немонолитических групп. Условие $b(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ означает, что Q -граница класса $\mathfrak{X}$ не содержит немонолитических примитивных групп (Q -границей класса X называется класс $b(\mathfrak{X})$), состоящий из всех тех групп G , которые не принадлежат $\mathfrak{X}$, но $G/N \in \mathfrak{X}$ для всех $1 \neq N \triangleleft G$).

Впервые классы Шунка $\mathfrak{X}$ с условием $b(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ исследовались в работе Ферстера [4], где было, в частности, доказано, что в любой группе $\mathfrak{X}$-проекторы образуют единственный класс сопряженных подгрупп тогда и только тогда, когда они сопряжены в любой группе из $b(\mathfrak{X})$. В связи с этим мы бу-