УДК 512.542

В.Г. Сементовский

Инъекторы конечных π-разрешимых групп для произведений классов Фиттинга

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{H}$ тоже будет классом Фиттинга. Отсюда возникает следующая задача – выразить $\mathfrak{F}$-инъектор группы G через $\mathfrak{X}$-инъекторы и $\mathfrak{H}$-инъекторы некоторых подгруппы группы G. Решению некоторых частных случаев этой задачи для π-разрешимых групп посвящена данная работа. В работе задача решена для $\mathfrak{F}$-инъекторов π-разрешимых групп в случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H}_\pi$, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – произвольные классы Фиттинга, а также для $\mathfrak{F}$-инъекторов разрешимых групп, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\pi\mathfrak{H}_{\pi'}$. $\mathfrak{E}_\pi$ всегда обозначает класс конечных π-групп

Терминология работы общепринята, в основном она совпадает с терминологией книги [1].

Частным случаем теорем 2.2. и 2.3 из [2] является следующая лемма.

Лемма 1. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и G – π-разрешимая группа, то:

1) в G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}_\pi$-инъекторов;
2) если F – $\mathfrak{F}_\pi$-инъектор группы G и $F \subseteq A \subseteq G$, то F – $\mathfrak{F}_\pi$-инъектор подгруппы A.

Лемма 2. Для всякого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ подгруппа F π-разрешимой группы G будет $\mathfrak{F}_\pi$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда F – $\mathfrak{F}$-инъектор всякой π-холловской подгруппы, содержащей F.

Доказательство. Пусть F – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы G_π. Если подгруппа N нормальна в G, то $N_\pi = N \cap G_\pi$ нормальна в G_π. Тогда $F \cap N_\pi = F \cap N \subseteq G_\pi$. Так как $F \cap N_\pi$ – $\mathfrak{F}$-инъектор в G_π, то $F \cap N$ – $\mathfrak{F}_\pi$-максимальна в N. Итак, F – $\mathfrak{F}_\pi$-инъектор группы G.

Обратное утверждение следует непосредственно из леммы 1.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$, где $\mathfrak{X}$ – произвольный класс Фиттинга. Если G – π-разрешимая группа с нормальной π-холловской подгруппой, то: 1) подгруппа $V = V_\pi G_{\pi'}$, где V_π – $\mathfrak{X}_\pi$-инъектор группы G, будет $\mathfrak{F}$-инъектором группы G;

2) если $V \subseteq A \subseteq G$, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы A;

3) всякие два $\mathfrak{F}$-инъектора группы G сопряжены.

Доказательство. Пусть V_π – $\mathfrak{X}_\pi$-инъектор группы G_π. По лемме 2 V_π будет $\mathfrak{X}_\pi$-инъектором группы G. Тогда для любого элемента g из G подгруппа V_π^g будет $\mathfrak{X}_\pi$-инъектором группы G. Так как V_π и V_π^g содержатся в G_π и будут $\mathfrak{X}$-инъекторами подгруппы G_π, то $V_\pi = V_\pi^{gy}$, где $y \in G_\pi$. Тогда $G = G_\pi N_G(V_\pi)$, и $N_G(V_\pi)$ содержит некоторую π'-холловскую подгруппу $G_{\pi'}$ группы G. В этом случае в G существует $\mathfrak{F}$-подгруппа $V = V_\pi G_{\pi'}$. Покажем, что V будет $\mathfrak{F}$-инъектором группы G. Сначала докажем $\mathfrak{F}$-максимальность в G. Пусть $V \subseteq R \in \mathfrak{F}$.

Тогда можно считать $R_{\pi'} = G_{\pi'}$. Из $V_\pi \subseteq R_\pi G_{\pi'}$ следует $V_\pi \subseteq R_\pi \in \mathfrak{X}$. Теперь ввиду $\mathfrak{X}$-максимальности подгруппы V_π в G_π получим $V_\pi = R_\pi$. Тогда $V = R$, и V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G.

1) Пусть N – нормальная подгруппа группы G и $N = N_\pi N_{\pi'}$. Так как N_π нормальна в G_π, то $V \cap N = (V \cap N_\pi) N_{\pi'} \supseteq (V_\pi \cap N_\pi) N_{\pi'} = N^*_\pi N_{\pi'}$, где N^*_π – $\mathfrak{X}$-инъектор подгруппы N. По доказанному выше $N^*_\pi N_{\pi'}$ – $\mathfrak{F}$-максимальна в N. Так как $N^*_\pi N_{\pi'} \subseteq V \cap N$, то подгруппа $V \cap N$ будет $\mathfrak{F}$-максимальной в N. Итак, V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.

2) Если $V = V_\pi G_{\pi'} \subseteq A$, то $A = A_\pi G_{\pi'}$ и $V_\pi \subseteq A_\pi \subseteq G_\pi$. Так как V_π – $\mathfrak{X}$-инъектор подгруппы G_π, то V_π – $\mathfrak{X}$-инъектор подгруппы A_π. Тогда V – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы A.

3) Пусть $V = V_\pi G_{\pi'}$, где V_π – $\mathfrak{X}$-инъектор подгруппы G, и $S = S_\pi S_{\pi'}$ – $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G. Сопряженность V и S докажем индукцией по $|G|$. Так как V_π и $S_\pi = S \cap G_\pi$ будут $\mathfrak{X}$-инъекторами подгруппы G_π, которая разрешима, то $V_\pi = S^x_\pi$, где $x \in G_\pi$. Теперь V и S^x содержатся в $N_G(V_\pi)$, и если $|N_G(V_\pi)| < |G|$, то V и S сопряжены. Итак $V_\pi = S_\pi$ и нормальна в G. Подгруппа S будет $\mathfrak{F}$-максимальной в G только тогда, когда $S = S_\pi G^*_{\pi'}$, где $G^*_{\pi'}$ – π'-холловская подгруппа группы G. Так как $G^*_{\pi'} = G^y_{\pi'}$, то $S = V^y$, и сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов доказана. Лемма доказана.

Приведем некоторые, необходимые в дальнейшем, сведения из [3].

Пусть A и B – подгруппы группы C. Если подгрупы C и D из A нормализуются подгруппой B, то подгруппа $\langle C, D \rangle$ – тоже. Поэтому в A существует единственная максимальная подгруппа среди всех, нормализующихся подгруппой B. Обозначим ее через $M_A(B)$. Очевидно, $M_A(B)$ порождается всеми подгруппами из A, которые нормализуются подгруппой B.

Лемма 4. Пусть $G = G_\pi G_{\pi'}$. Тогда $M_{G_\pi}(G_{\pi'}) = O_\pi(G)$ и, если подгруппа A содержится в некоторой π-холловской подгруппе группы G и $G_{\pi'} \subseteq N_G(A)$, то $A \subseteq O_\pi(G)$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$, *где* $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга, и* G *–* π*-разрешимая группа. Тогда:*

1) *подгруппа* $V = V_\pi G_{\pi'}$, *где* V_π – $\mathfrak{X}$ *-инъектор из* $O_\pi(G)$, *будет* $\mathfrak{F}$*-инъектором группы* G;
2) *если* $V \subseteq A \subseteq G$, *то* V – $\mathfrak{F}$*-инъектор подгруппы* A;
3) *всякие два* $\mathfrak{F}$*-инъектора группы* G *сопряжены.*

Доказательство. Пусть $V = V_\pi G_{\pi'}$. Обозначим $S = O_\pi(G)G_{\pi'}$. Тогда $V \subseteq S$ и по лемме 3 V будет $\mathfrak{F}$-инъектором подгруппы S, которая по теореме 9 из [3] будет $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$-инъектором группы G.

Докажем $\mathfrak{F}$-максимальность подгруппы V в G. Пусть $V \in R \in \mathfrak{F}$. Тогда $R = R_\pi R_{\pi'}$. Из $G_{\pi'} \subseteq R_{\pi'}$ следует $R_{\pi'} = G_{\pi'}$. Теперь по лемме 4 $R_\pi \subseteq O_\pi(G)$. Так как $V_\pi \subseteq R_\pi$ и V_π – $\mathfrak{X}$ -максимальна в $O_\pi(G)$, то $V_\pi = R_\pi$. Тогда $V = R$.

1) Пусть подгруппа N нормальна в G. Тогда $S \cap N$ нормальна в S и будет $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$-инъектором подгруппы S. Поэтому $S \cap N = O_\pi(N)N_{\pi'}$. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы S и $V \cap N = V \cap S \cap N$, то $V \cap N$ будет $\mathfrak{F}$-инъектором подгруппы $S \cap N$. Тогда по лемме 3 $V \cap N = X_\pi N_{\pi'}$, где X_π – $\mathfrak{X}$ -инъектор из $O_\pi(N)$. Теперь по доказанному выше, $V \cap N$ $\mathfrak{F}$-максимальна в N. Итак, V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.

2) Пусть $V = V_\pi G_{\pi'}$ и $V \subseteq A \subseteq G$. Так как $G_{\pi'} \subseteq A$, то $A_{\pi'} = G_{\pi'}$. Итак, $V \subseteq A_\pi G_{\pi'}$. Теперь по лемме 4 $V_\pi \subseteq O_\pi(A) \subseteq O_\pi(G)$. Так как V_π – $\mathfrak{X}$ -инъектор подгруппы $O_\pi(G)$, то V_π будет $\mathfrak{X}$ -инъектором подгруппы $O_\pi(A)$. Итак, V – $\mathfrak{F}$ -инъектор подгруппы A.

3) Пусть $V = V_\pi G_{\pi'}$, где V_π – $\mathfrak{X}$ -инъектор подгруппы $O_\pi(G)$ и $F = F_\pi F_{\pi'}$ – произвольный $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G. Сопряженность подгрупп V и F докажем индукцией по $|G|$. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда возможны следующие два случая: а) M содержит π-холловские подгруппы группы G; в) M содержит π'-холловские подгруппы группы G.

а) Пусть M содержит π-холловские подгруппы группы G. Тогда V_π и F_π содержатся в M, и $V \cap M = V_\pi M_{\pi'}$, $F \cap M = F_\pi(F_{\pi'} \cap M)$. По индукции $V \cap M = (F \cap M)^m$, где $m \in M$. Теперь $V_\pi M_{\pi'} = F_\pi^m(F_{\pi'} \cap M)$. Так как V_π и F_π^m -- нормальные π-холловские подгруппы из $V \cap M$, то $V_\pi = F_\pi^m$. Тогда V и F^m содержатся в $N_G(V_\pi)$. Если $|N_G(V_\pi)| < |G|$, то по индукции V и F сопряжены. Итак, $F_\pi = V_\pi$ и нормальна в G. Тогда максимальной $\mathfrak{F}$ -подгруппой группы G, содержащей F_π, будет $F_\pi G_{\pi'} = F$. Итак, $V = F$, и в этом случае сопряженность доказана.

в) Пусть M содержит π'-холловские подгруппы группы G. Тогда $V \cap M = (V_\pi \cap M) G_{\pi'}$ и $F \cap M = (F_\pi \cap M) F_{\pi'}$. По индукции $V \cap M = (F \cap M)^m$, где $m \in M$. Отсюда подгруппы $F_{\pi'}^m$ и $G_{\pi'}$ будут π'-холловскими из $V \cap M$, и следовательно, сопряжены элементом подгруппы $V \cap M$. Поэтому можно считать $F_{\pi'} = G_{\pi'}^m$. Итак, $F = G_{\pi'}^m$. Обозначим $S = O_\pi(G) G_{\pi'}$. Тогда $F \subseteq O_\pi(G) G_{\pi'}^m = S^m$. Подгруппы V^m и F содержатся в S^m, и, если $|S| < |G|$, то по индукции V и F сопряжены. Итак, $G = F_\pi O_\pi(G) G_{\pi'}$. Теперь V и F сопряжены по лемме 3. Сопряженность V и F доказана. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\pi \mathfrak{G}_{\pi'}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}_\pi \mathfrak{H}_{\pi'}$, где $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга. Тогда всякий $\mathfrak{F}$ -инъектор π-разрешимой группы G, π'-холловская подгруппа которой принадлежит $\mathfrak{H}$, будет $\mathfrak{F}^*$-инъектором группы G.

Лемма 6. Пусть F – класс Фиттинга и F – $\mathfrak{F}_\pi$ -инъектор π-разрешимой группы G. Тогда существует π'-холловская подгруппа группы G перестановочная с F.

Доказательство. Пусть $\rho = \pi(F)$. Так как $\rho \subseteq \pi$, то G – ρ-разрешимая группа. Сначала докажем, что существует ρ'-холловская подгруппа группы G, перестановочная с F. Допустим противное. Пусть G – группа наименьшего порядка среди всех, для которых лемма неверна. Пусть N минимальная нормальная подгруппа группы G. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество Фиттинга группы G, которое индуцируется классом $\mathfrak{F}$. По VIII. 2.15 из [1] множество $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N \mid S$ – $\mathcal{F}$-инъектор в $SN\}$ будет множеством Фиттинга группы G/N и FN/N будет $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектором группы G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то по индукции существует ρ'-холловская подгруппа $G_{\rho'} N/N$ группы G/N, перестановочная с FN/N. Тогда $G_{\rho'} FN$ будет группой. Если N – ρ'-группа, то $N \subseteq G_{\rho'}$ и $G_{\rho'}F$ будет группой. Итак, N – абелева ρ-группа. Тогда $N \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq F$ и $G_{\rho'} F$ – группа. Перестановочность $G_{\rho'}$ и F доказана.

Теперь, ввиду π-разрешимости группы $G_{\rho'} F$ в $G_{\rho'} F$ существует π'-холловская подгруппа $G_{\pi'}$ перестановочная с ρ-холловской подгруппой F группы $G_{\rho'} F$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть F – $\mathfrak{F}_\pi$-инъектор π-разрешимой группы G, $\rho = \pi(F)$ и $G_{\rho'}$ – ρ'-холловская подгруппа группы G, перестановочная с F. Если ρ'-подгруппа P перестановочна с F, то $P \subseteq G_{\rho'}^{x}$, где $x \in N_G(F)$.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример и N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G, которое индуцирует в G класс $\mathfrak{F}$ и $\mathcal{F}_{G/N}$ – множество Фиттинга группы G/N. Так как для G/N условия леммы выполняются, то $PN/N \subseteq (G_{\rho'}N/N)^{xN}$, где $xN \in N_{G/N}(FN/N)$. Ввиду пронормальности F в G $N_{G/N}(FN/N) = N_G(F)\,N/N$. Итак, $PN/N \subseteq G_{\rho'}^{x}\,N/N$, где $x \in N_G(F)$. Если N – ρ'-группа, то $P \subseteq G_{\rho'}^{x}$, и лемма верна. Итак, N – абелева ρ-группа. Тогда $N \subseteq F \subseteq N_G(F)$ и $P \subseteq G_{\rho'}^{xn}$, где $n \in N$. Следовательно, $P \subseteq G_{\rho'}^{xn}$, где $xn \in N_G(F)$, и лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть G – π-разрешимая группа, $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга и F_π – $\mathfrak{H}_\pi$-инъектор группы G. Пусть $\rho = \pi(F_\pi)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\rho'}\mathfrak{H}_\rho$. Тогда: 1) в G существует $\mathfrak{F}$-инъектор $F = F_{\rho'}F_\rho$, где $F_\rho = F_\pi$ и $F_{\rho'} = O_{\rho'}(G_{\rho'}F_\rho)$;*

2) *если $F \subseteq A \subseteq G$, то F – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы A;*

3) *всякие два $\mathfrak{F}$-инъектора группы G сопряжены.*

Доказательство. Подгруппа F_ρ содержится в некоторой ρ-холловской подгруппе G_ρ группы G и по лемме 2 будет $\mathfrak{H}$-инъектором в G_ρ. По лемме 6 существует ρ'-холловская подгруппа $G_{\rho'}$ перестановочная с F_ρ. Обозначим $F_{\rho'} = O_{\rho'}(G_{\rho'}F_\rho)$. Тогда $F = F_{\rho'}F_\rho \in \mathfrak{F}$. Сначала докажем $\mathfrak{F}$-максимальность подгруппы F в G. Пусть $F \subseteq R \in \mathfrak{F}$. Тогда $R = R_{\rho'}R_\rho$ и $R_\rho \in \mathfrak{H}$. Не ограничивая общности можно считать $F_\rho \subseteq R_\rho \subseteq G_\rho$. Так как F_ρ – $\mathfrak{H}$-максимальна в G_ρ, то $F_\rho = R_\rho$ и $F \subseteq R_{\rho'}F_\rho$. Тогда $F_{\rho'} \subseteq R_{\rho'}$. Подгруппа $R_{\rho'}$ перестановочна с F_ρ и по лемме 7 $R_{\rho'} \subseteq G_{\rho'}^{n}$, где $n \in N_G(F_\rho)$. Подгруппы F_ρ и $G_{\rho'}^{n}$ перестановочны и так как $R_{\rho'}$ нормализуется подгруппой F_ρ, то $R_{\rho'} \subseteq O_{\rho'}(G_{\rho'}^{n}F_\rho) = F_{\rho'}^{n}$. Из $F_{\rho'} \subseteq R_{\rho'} \subseteq F_{\rho'}^{n}$ следует $F_{\rho'} = R_{\rho'}$, и $F = R$.

1) Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Обозначим $K = G_{\rho'}F_\rho \cap N$. Тогда $K = N_{\rho'}(F_\rho \cap N)$ и $F \cap N = F \cap K$. По теореме 5 $F \cap K = O_{\rho'}(N_{\rho'}(F_\rho \cap N))(F_\rho \cap N)$, где $N_{\rho'}$ и $F_\rho \cap N$ перестановочны. По доказанному выше $F \cap N$ будет $\mathfrak{F}$-максимальной в N. Следовательно, F – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.

2) Пусть $F \subseteq A \subseteq G$. Тогда $F_\rho \subseteq A_\rho \subseteq G_\rho$ и F_ρ – $\mathfrak{H}_\rho$-инъектор подгруппы A. По лемме 6 существует ρ'-холловская подгруппа $A_{\rho'}$ из A перестановочная с F_ρ. Так как $G_{\rho'}$ и F_ρ перестановочны, то по лемме 7 $A_{\rho'}^{n} \subseteq G_{\rho'}$, где $n \in N_G(F_\rho)$. Тогда $A_{\rho'}^{n}$ перестановочна с F_ρ. Пусть $F_{\rho'} = O_{\rho'}(G_{\rho'}F_\rho)$ и $L = O_{\rho'}(A_{\rho'}F_\rho)$. Из $A_{\rho'}^{n}F_\rho \subseteq G_{\rho'}F_\rho$ следует $O_{\rho'}(A_{\rho'}^{n}F_\rho) = L^n \subseteq F_{\rho'}$. Кроме того, $F_{\rho'} \subseteq A_{\rho'}^{n} \subseteq G_{\rho'}$ и нормализуется подгруппой F_ρ. Поэтому $F_{\rho'} \subseteq L^n$. Итак, $F = O_{\rho'}(A_{\rho'}^{n}F_\rho)$, и по 1) F – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы A.

3) Пусть $F = F_{\rho'}F_\rho$ – построенный нами $\mathfrak{F}$-инъектор, а $V = V_{\rho'}V_\rho$ – произвольный $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Сопряженность подгрупп F и V докажем индукцией по $|G|$. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда M содержит либо ρ'-холловские, либо ρ-холловские подгруппы группы G.

а) Пусть M содержит ρ'-холловские подгруппы группы G. По индукции $F \cap M = (V \cap M)^x$, где $x \in M$. При этом $F \cap M = F_{\rho'}(F_\rho \cap M)$ и $V \cap M = V_{\rho'}(V_\rho \cap M)$. Поэтому $F_{p'} = V_{p'}^{x}$. Теперь подгруппы F и V^{x} содержатся в $N_G(F_{p'})$ и по 2 будут $\mathfrak{F}$-инъекторами этой подгруппы. Если $|N_G(F_{p'})| < |G|$, то утверждение доказано. Итак, $F_{p'} = V_{p'}$ нормальна в G. Подгруппы $F_p \cap M$ и $V_p^x \cap M$ будут p-холловскими в $F \cap M$. Поэтому $F_p \cap M = V_p^{xy} \cap M$, $y \in F \cap M$. Так как $F_p \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор подгруппы M, то $V_p \cap M$ – тоже. Пусть $F_p \subseteq G_p$. Тогда $F_p \cap M = F_p \cap M_p$, где $M_p \subseteq G_p$. Аналогично, $V_p^{xy} \cap M = V_p^{xy} \cap M_p$. Так как M_p нормальна в G_p и $G_p / M_p \in \mathfrak{N}$, то по лемме из [4] $F_p = V_p^{xyt}$, где $t \in G_p$. Тогда $F = F_{p'} F_p = V_{p'} V_p^{xyt}$ и сопряженность F и V доказана.

в) Итак M содержит p-холловские подгруппы группы G. Тогда $F \cap M = (F_{p'} \cap M) F_p$ и $V \cap M = (V_{p'} \cap M)V_p$. По индукции $F \cap M = (V \cap M)^m$, где $m \in M$. Так как F_p и V_p^m – p-холловские подгруппы из $F \cap M$, то $F_p = V_p^{mk}$, где $k \in F \cap M$. Тогда V_p – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Пусть $F_p \subseteq G_p$ и $G_{p'}$ перестановочна с F_p. Обозначим $V^* = V^{mk}$. Тогда V^* – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $V^* = V_{p'}^* F_p$. Так как V^* – $\mathfrak{F}$-максимальна в G, то $V_{p'}^*$ будет максимальной p'-подгруппой, которая нормализуется подгруппой F_p. По лемме 7 $V_{p'}^* \subseteq G_{p'}^n$, где $n \in N_G(F_p)$. Тогда $V_{p'}^* = O_{p'}(G_{p'}^n F_p) = F_{p'}^n$. Теперь $V^* = V_{p'}^* V_p^* = F_{p'}^n F_p = F^n$. Так как F и V^* сопряжены, то F и V тоже. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть* $F = \mathfrak{X}_{\pi'} \mathfrak{H}_\pi$, *где* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга,* F_π *–* $\mathfrak{H}_\pi$*-инъектор* π*-разрешимой группы* G, $p = \pi(F_\pi)$ и $G_{p'}$ *–* p'*-холловская подгруппа группы* G*, перестановочная с* F_π. *Пусть* $S = O_{p'}(G_{p'}F_p)$. *Если в* S *существует* $\mathfrak{X}_{\pi'}$*-инъектор* $F_{\pi'}$, *всякие два* $\mathfrak{X}_{\pi'}$*-инъектора из* S *сопряжены в* S*, и из* $F_{\pi'} \subseteq A \subseteq G$ *следует, что* $F_{\pi'}$ *–* $\mathfrak{X}_{\pi'}$*-инъектор подгруппы* A*, то:*

1) *подгруппа* $F = F_{\pi'} F_\pi$, *где* $F_{\pi'}$ *и* F_π *перестановочны, будет* $\mathfrak{F}$*-инъектором группы* G;
2) *если* $F \subseteq A \subseteq G$, *то* F *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор подгруппы* A;
3) *всякие два* $\mathfrak{F}$*-инъектора группы* G *сопряжены.*

Доказательство. Сначала докажем $\mathfrak{F}$-максимальность подгруппы F в G. Пусть $F \subseteq R \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $R = R_{\pi'} R_\pi$, где $R_{\pi'} \in \mathfrak{X}$ и $R_\pi \in \mathfrak{H}$. Если $F_\pi \subseteq R_\pi$, то ввиду $\mathfrak{H}_\pi$-максимальности F_π в G получим $F_\pi = R_\pi$. Теперь $F \subseteq R_{\pi'} F_\pi$. Подгруппы $R_{\pi'}$ и F_π перестановочны и по лемме 7 $R_{\pi'} \subseteq G_{p'}^n$, где $n \in N_G(F_\pi)$. Тогда $R_{\pi'} \subseteq O_{p'}(G_{p'}^n F_\pi) = S^n$. Так как $F_{\pi'}$ – $\mathfrak{X}_{\pi'}$-инъектор в S^n, то $F_{\pi'} = R_{\pi'}$. Тогда $F = R$.

1) Пусть N – нормальная подгруппа группы G и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{H}_p$. Тогда по теореме 8 $F^* = O_{p'}(G_{p'})F_\pi$ будет $\mathfrak{F}^*$-инъектором группы G и $F \subseteq F^*$. Теперь $F^* \cap N = XH$, где H – $\mathfrak{H}_\pi$-инъектор подгруппы N, а $X = O_{p'}(N_{p'}H)$ для некоторой подгруппы $N_{p'}$ перестановочной с H. Следовательно, $F \cap N = F \cap F^* \cap N = F \cap XH = (F \cap X)H$. Так как X нормальна в XH и X – p'-подгруппа, то $F \cap X = F_{p'} \cap X$ и будет $\mathfrak{X}_{\pi'}$-инъ-ектором в X. По доказанному выше $F \cap N$ – $\mathfrak{F}$-максимальна в N. Следовательно, F – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.

2) Пусть $F \subseteq A \subseteq G$. Так как $F_\pi \subseteq A$, то F_π – $\mathfrak{H}_\pi$-инъектор подгруппы A. По лемме 6 существует подгруппа $A_{p'}$ перестановочная с F_π. Так как $G_{p'}$ перестановочна с F_π, то $A_{p'} \subseteq G_{p'}^n$, где $n \in N_G(F_\pi)$. Теперь из $F \subseteq A_{p'} F_\pi$ следует $F_{\pi'} \subseteq$

$O_{p'}(A_{p'}F_\pi) \subseteq O_{p'}(G^n_{p'} F_\pi) = S^n$. Так как $F_{\pi'}$ – $\mathfrak{X}_{\pi'}$-инъектор в S^n, то и в $O_{p'}(A_{p'}F_\pi)$. Тогда по 1 F будет $\mathfrak{F}$-инъектором подгруппы A.

3) Пусть $F = F_{\pi'} F_\pi$ и $V = V_{\pi'} V_\pi$ – $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G. Сопряженность F и V докажем индукцией по $|G|$. Пусть M максимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда M содержит либо π'-холловские, либо π-холловские подгруппы группы G.

а) Пусть M содержит π'-холловские подгруппы. Тогда $F \cap M = F_{\pi'} (F_\pi \cap M)$ и $V \cap M = V_{\pi'} (V_\pi \cap M)$. По индукции $F \cap M = (V \cap M)^m$, где $m \in M$. Так как F_π и V_π^m нормальны в $F \cap M$, то $F_{\pi'} = V_{\pi'}^m$. Теперь подгруппы F и V^m содержатся в $N_G(F_{\pi'})$. Если $|N_G(F_{\pi'})| < |G|$, то утверждение верно. Итак, $F_{\pi'} = V_{\pi'}$ и нормальна в G. Так как $F_\pi \cap M$ и $V_\pi^m \cap M$ будут π-холловскими подгруппами $F \cap M$, то они сопряжены в $F \cap M$. Итак, можно считать $F_\pi \cap M = V_\pi^m \cap M$, где $m \in M$. Пусть $F_\pi \cap M \subseteq M_\pi \subseteq G_\pi$. Тогда $F_\pi \cap M_\pi$ – $\mathfrak{H}$-инъектор подгруппы M_π. Так как G_π / M_π – нильпотентна, по лемме из [4] получим $F_\pi = V_\pi^{ms}$, где $s \in G_\pi$. Тогда $F = F_{\pi'} F_\pi = V_{\pi'} V_\pi^{ms} = V^{ms}$, и в этом случае утверждение доказано.

в) Итак, M содержит π-холловские подгруппы группы G. Тогда $F \cap M = (F_{\pi'} \cap M) F_\pi$ и $V \cap M = (V_{\pi'} \cap M)V_\pi$. Причем $F \cap M = (V \cap M)^m$, где $m \in M$. Так как F_π и V_π^m – π-холловские подгруппы из $F \cap M$, то они сопряжены элементом из M. Теперь не ограничивая общности можно из класса сопряженных с V подгрупп выбрать такую, для которой $V_\pi = F_\pi$. Итак, пусть $V = V_{\pi'} F_\pi$. По лемме 7 $V_{\pi'} \subseteq G^n_{p'}$, где $n \in N_G(F_{\pi'})$. Тогда $V \subseteq (G_{p'} F_\pi)^n$. Итак V^{n-1}, $F \subseteq G_{p'} F_\pi$ и по 2) будут $\mathfrak{F}$-инъекторами в $G_{p'} F_\pi$. Если $|G_{p'} F_\pi| < |G|$, то по индукции F и V сопряжены. Итак, $G = G_{p'} F_\pi$. Теперь $S = O_{p'}(G)$, и так как $V_{\pi'}$ нормализуется подгруппой F_π, то $V_{\pi'} \subseteq O_{p'}(G)$. Тогда F, $V \subseteq O_{p'}(G) F_\pi$. Если $|O_{p'}(G) F_\pi| < |G|$, то утверждение справедливо. Итак, $G = O_{p'}(G) F_\pi$. Теперь по теореме 5 F и V сопряжены. Теорема доказана.

Следствие 1. Теорема 9 справедлива при $\mathfrak{X}_{\pi'} = \mathfrak{S}_{\pi'}$ и $\mathfrak{X}_{\pi'} = \mathfrak{S}_q$, где $q \in \pi'$.

Следствие 2. Если в условии теоремы 9 подгруппа S разрешима, то 1)-3) выполняются для любого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups, VIII. Berlin-New-York, 1992.
2. ***Шеметков Л.А.*** О подгруппах π-разрешимых групп. В сб. Конечные группы. Минск, Наука и техника, 1975. С. 207-212.
3. ***Сементовский В.Г.*** Дисперсивные инъекторы конечных групп // Веснік ВДУ, № 2, 1996. С. 99-105.
4. ***Fischer B., Gaschiitz W., Hartlej B.*** Injektoren auflosbaren Grouppen. Math. Z., 1967. P.102-104.

SUMMARY

In this paper property on injectors for products of Fittitg classes $\mathfrak{X}_\pi$ and $\mathfrak{S}_{\pi'}$ is described. A representative of such injectors in the form of the product of $\mathfrak{X}_\pi$-injector and $\mathfrak{S}_{\pi'}$-injector of some subgroups of the given group is obtained.