УДК 512.534

М.И. Наумик

Стабильные квазипорядки на подполугруппе $LR_1(V)$ и главных факторах полугруппы линейных отношений

Автор продолжает изучение полугруппы линейных отношений [1], то есть полугруппы частичных многозначных линейных преобразований векторного пространства над телом. В данной работе описаны стабильные квазипорядки (транзитивные и рефлексивные частичные бинарные отношения) на подполугруппе $LR_1(V)$ и главных факторах полугруппы линейных отношений.

1. Предварительные сведения. Пусть V – векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V, называется линейным, если оно является подпространством пространства $V \oplus V$. Другими словами, линейное отношение – это множество пар $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элементе из F.

Множество LR(V) всех линейных отношений на пространстве V является, как известно [1], полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений.

Для любых $\alpha \in F$, $N \subseteq F$, $a \in LR(V)$ обозначим через αa, Na, a^{-1} множества

$$\alpha a = \{(\bar{x}, \alpha\bar{y}) : (\bar{x}, \bar{y}) \in a\},\ Na = \{\alpha a : \alpha \in N\},\ a^{-1} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : (\bar{y}, \bar{x}) \in a\}.$$

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства пространства V:

$$pr_1a = \{\bar{x} \in V : (\exists\, \bar{y} \in V),\ (\bar{x}, \bar{y}) \in a\};\ \ker a = \{\bar{x} \in V : (\bar{x}, \bar{o}) \in a\};$$

$$pr_2a = \{\bar{y} \in V : (\exists\, \bar{x} \in V),\ (\bar{x}, \bar{y}) \in a\};\ \operatorname{coker} a = \{\bar{y} \in V : (\bar{o}, \bar{y}) \in a\}.$$

Ясно, что $\ker a \subseteq pr_1a$, $\operatorname{coker} a \subseteq pr_2a$.

Для произвольного подпространства $B \subseteq V$ обозначим $\omega_B = \{(\bar{x}, \bar{o}) : \bar{x} \in B\}$.

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой $\operatorname{rank} a = \dim pr_1a / \ker a$.

Известно, что $\operatorname{rank}(ab) \le \operatorname{rank} a$ и $\operatorname{rank}(ab) \le \operatorname{rank} b$, для любых $a, b \in LR(V)$. Поэтому множество $LR_r(V)$ всех линейных отношений $a \in LR(V)$ таких, что $\operatorname{rank} a < r$, $1 \le r \le n$, образует идеал полугруппы LR(V).

Приведем описание идеалов и эквивалентностей Грина на полугруппе LR(V).

<u>Предложение 1</u>. Все идеалы полугруппы LR(V) являются главными и исчерпываются подполугруппами $LR_r(V)$, $1 \le r \le \dim V$.

<u>Предложение 2</u>. Два элемента $a, b \in LR(V)$ будут R-эквивалентны (соответственно L-эквивалентны) тогда и только тогда, когда $pr_1a = pr_1b$ и $\ker a = \ker b$ ($pr_2a = pr_2b$ и $\operatorname{coker} a = \operatorname{coker} b$). Два элемента $a, b \in LR(V)$ будут D-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} a = \operatorname{rank} b$.

Обозначим D-класс, состоящий из элементов ранга ξ, $0 \le \xi \le \dim V$, через D_ξ.

Пусть $V_1, V_2, V_3, V_4, \subseteq V$ – некоторые подпространства V, причем $V_2 \subseteq V_1$, $V_4 \subseteq V_3$; $\dim V_1/V_2 = \dim V_3/V_4 = \xi$; $R(V_1, V_2)$ (соответственно $L(V_3, V_4)$; $H(V_2, V_3, V_4)$) – множество всех линейных отношений $a \in LR(V)$ таких, что $pr_1 a = V_1$, $\ker a = V_2$ (соответственно $pr_2 a = V_3$, $\operatorname{coker} a = V_4$; $pr_1 a = V_1$, $\ker a = V_2$, $pr_2 a = V_3$, $\operatorname{coker} a = V_4$).

Предложение 3. Множества $R(V_1, V_2)$ (соответственно $L(V_3, V_4)$ и только они, являются R-классами (L-классами) полугруппы LR(V), содержащимися в D_ξ. Множества $H(V_1, V_2, V_3, V_4)$ и только они, являются H-классами подгруппы LR(V), содержащимися в D_ξ.

Приведенное описание аналогично описанию эквивалентностей и классов Грина на полугруппе LR(V) для конечномерного V, данному в [2], поэтому доказательство всех трех предложений мы опускаем.

Все остальные необходимые обозначения и определения можно найти в [3].

2. Инвариантные квазипорядки полугруппы прямоугольных линейных отношений. Рассмотрим некоторые стабильные квазипорядки полугруппы прямоугольных линейных отношений $LR_1(V)$, которые будут нам необходимы для описания стабильных квазипорядков полугруппы линейных отношений.

Обозначим $\omega = \omega_0 = \{(\bar{o}, \bar{o})\}$. Ясно, что для любого $a \in LR_1(V)$ имеем $a = \omega_A \omega_B^{-1}$, где $pr_1 a = A$, $pr_2 a = B$. Заметим, что $LR_1(V)$ является прямоугольной связкой, и в частности вполне простой полугруппой.

Квазипорядок σ полугруппы прямоугольных линейных отношений будем называть инвариантным квазипорядком σ, если для любых $a, b \in LR_1(V)$ и $c, d \in LR(V)$ из $a\sigma b$ следует $cad\sigma cbd$.

Ясно, что инвариантный квазипорядок является стабильным.

Пусть σ – стабильный квазипорядок полугруппы $LR_1(V)$. Для любых подпространств A и B, удовлетворяющих условию $\omega_A\sigma\,\omega_B$, существуют такие кардинальные числа ν_i, что $\dim A/A\cap B < \nu_i$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $\nu(\sigma)$. Существуют такие кардинальные числа ν_{1i}, что $\dim B/A\cap B < \nu_{1i}$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $\nu_1(\sigma)$. Для любых подпространств C и D, удовлетворяющих условию $\omega_C^{-1}\sigma\omega_D^{-1}$, существуют такие кардинальные числа ν'_j, что $\dim C/C\cap D < \nu'_j$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $\nu'(\sigma)$. Существуют такие кардинальные числа ν'_{1j}, что $\dim D/C\cap D < \nu'_{1j}$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $\nu'_1(\sigma)$.

Обозначим через $\nu(V)$ множество кардинальных чисел, определяемое условиями:

если $\dim V \ge \aleph_0$, то $\nu \in \nu(V)$ тогда и только тогда, когда $\nu = 1$ или $\aleph_0 \le \nu \le (\dim V)'$, где $(\dim V)'$ – кардинальное число, следующее за числом $\dim V$;

если $\dim V < \aleph_0$, то $\nu \in \nu(V)$ тогда и только тогда, когда $\nu = 1$ или $\nu = 1 + \dim V$.

Определим отношения $\sigma_1(\nu)$, $\sigma_2(\nu_1)$, $\sigma_3(\nu')$, $\sigma_4(\nu'_1)$, где $\nu, \nu_1, \nu', \nu'_1 \in \nu(V)$, на полугруппе $LR_1(V)$ следующим образом:

$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_1(\nu)\omega_B\omega_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\dim A/A\cap B < \nu$;

$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_2(\nu_1)\,\omega_B\omega_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\dim B/A\cap B < \nu_1$;

$\omega_A \omega_C^{-1} \sigma_3(v') \omega_B \omega_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда dim $C/C \cap D < v'$;

$\omega_A \omega_C^{-1} \sigma_4(v_1') \omega_B \omega_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда dim $D/C \cap D < v_1'$.

Далее, определим отношение $\sigma(v, v_1, v', v_1')$ на полугруппе $LR_1(V)$, полагая

$$\sigma(v, v_1, v', v_1') = \sigma_1(v) \cap \sigma_2(v_1) \cap \sigma(v') \cap \sigma(v_1').$$

Теорема 1. *Отношение $\sigma(v, v_1, v', v_1')$ является инвариантным квазипорядком полугруппы* $LR_1(V)$. *Любой инвариантный квазипорядок полугруппы $LR_1(V)$ совпадает с одним из отношений* $\sigma(v, v_1, v', v_1')$.

Доказательство этой теоремы осуществляется непосредственной проверкой аналогично теореме из [4].

3. Стабильные квазипорядки главных факторов полугруппы линейных отношений. Построим вполне о-простую матричную полугруппу, изоморфную полугруппе $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$, $1 \le n < \aleph_0$, dim V, и изучим стабильные квазипорядки главных факторов полугруппы LR(V).

Пусть D_n – D-класс полугруппы LR(V), z – некоторый символ, не содержащийся в D_n. На множестве $D_n^z = D_n \cup \{z\}$ определим операцию (∗): для любых $a, b \in D_n$ положим

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{если } \operatorname{rank} ab = n; \\ z, & \text{если } \operatorname{rank} ab < n; \end{cases}$$

$$z * z = z * a = a * z = z.$$

Относительно этой операции D_n^z является, как легко показать, полугруппой, изоморфной главному фактору полугруппы $LR(V) - LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$.

Пусть V_n – некоторое фиксированное n-мерное подпространство из V, H_n – H-класс $H(V_n, \bar{o}, V_1, \bar{o})$. Очевидно, H_n совпадает с полной линейной группой $GL(V_n)$. Обозначим через e_n единицу группы H_n; через R_i, L_λ – R-классы и, соответственно L-классы, содержащиеся в D_n, через I^n, Λ^n – множества всех индексов i и λ. Тогда всякий H-класс, содержащийся в D_n, можно представить в виде $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$. Для любых $i \in I^n$, $\lambda \in \Lambda^n$ существуют подпространства A, B, C, D $\subseteq$ V такие, что dim A/B = dim C/D = n и $R_i = R(A, B)$, $L_\lambda = L(C,D)$. Представим A и C в виде $A = B \oplus A_1$, $C = D \oplus C_1$, где dim A_1 = dim C_1 = n. Пусть d_i – фиксированное биективное линейное отображение A_1 на V_n; d_λ – фиксированное биективное линейное отображение V_n на C_1; $a_i \in R_i$ и $a_\lambda \in L_\lambda$ линейные отношения

$$a_i = \langle (\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) : \bar{x} \in B, (\bar{y}, \bar{z}) \in d_i \rangle,$$

$$a_\lambda = \langle (\bar{z}, \bar{x} + \bar{y}) : \bar{x} \in D, (\bar{z}, \bar{y}) \in d_\lambda \rangle.$$

Отсюда следуют очевидные две леммы.

Лемма 1. $a_\lambda a_i \in H_n$ или rank $a_\lambda a_i < n$ при любых $\lambda \in \Lambda^n$, $i \in I^n$.

Лемма 2. Каждой тройке (i, g, λ) ($i \in I^n$, $g \in H_n$, $\lambda \in \Lambda^n$) соответствует взаимно однозначно линейное отношение $a = a_i g a_\lambda$, такое что rank a = n.

Лемма 3. Полугруппа D_n^z изоморфна регулярной рисовской полугруппе $M^0(I^n, H_n, \Lambda^n, P_n)$ матричного типа с сэндвич-матрицей $P_n = (p_{\lambda j})$ над группой с нулем H_n^z, т.е. полугруппа D_n^z вполне о-простая.

Доказательство. Положим

$$p_{\lambda j} = \begin{cases} a_\lambda a_j, & \text{если } \operatorname{rank} a_\lambda a_j = n; \\ z, & \text{если } \operatorname{rank} a_\lambda a_j < n. \end{cases}$$

Имеем $p_{\lambda j} \in H_n^z = H_n \cup \{z\}$. Обозначим через $P_n = (p_{\lambda j})$ Λ^n I^n – матрицу над группой с нулем H_n^z. Отметим, для каждого $\lambda \in \Lambda^n$ найдется $j \in I^n$ такой, что $p_{\lambda j} \neq z$. Аналогично для каждого $j \in I^n$ найдется $\lambda \in \Lambda^n$, что $p_{\lambda j} \neq z$.

Отождествим все тройки вида (i, z, λ), $i \in I^n$, $\lambda \in \Lambda^n$, обозначив их через Θ. Положим

$$M = \{(i, g, \lambda) : i \in I^n, g \in H_n, \lambda \in \Lambda^n\} \cup \{\Theta\}.$$

На множестве M определим операцию (о) следующим образом:

$$(i, g, \lambda)\,(\circ)\,(j, g', \mu) = \begin{cases} (i, gp_{\lambda j}g', \mu), & \text{если } p_{\lambda j} \neq z, \\ \Theta, & \text{если } p_{\lambda j} = z. \end{cases}$$

Легко проверить, что M относительно операции (о) является полугруппой.

Определим отображение φ, полагая $a\varphi = (i, g, \lambda)$, где $a = a_i g a_\lambda \in D_n$, $(i, g, \lambda) \in M$. Положим $z\varphi = \Theta$. Полугруппа D_n^z изоморфна регулярной рисовской полугруппе $M^0(I^n, H_n, \Lambda^n, P_n)$ матричного типа с сэндвич-матрицей $P_n = (p_{\lambda j})$ над группой с нулем H_n^z. Этот изоморфизм осуществляется описанным выше отображением φ. Следовательно, полугруппа D_n^z вполне о-простая.

Лемма доказана.

Следствие. Главный фактор $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ полугруппы $LR(V)$ изоморфен регулярной полугруппе $M^0(I^n, H_n, \Lambda^n, P_n)$ матричного типа с сэндвич-матрицей $P_n = (p_{\lambda j})$ над группой с нулем H_n^z, т.е. полугруппа $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ вполне о-простая.

Доказательство очевидно.

Лемма 4. Пусть ρ – стабильный квазипорядок полугруппы M. Если (i, g, λ) $\rho(i', g', \lambda')$ при $i \neq i'$ или $\lambda \neq \lambda'$, то ρ – универсальный стабильный порядок.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 из [3].

Следствие. Пусть ρ – стабильный квазипорядок полугруппы D_n^z, отличный от универсального. Тогда $a\rho b$ влечет равенство $pr_1 a = pr_1 b$, $\ker a = \ker b$, $\operatorname{coker} a = \operatorname{coker} b$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Пусть N – нормальная подполугруппа группы H_n, то есть для любого $g \in H_n$ имеем $gN = N_g$ и $e_n \in N$.

Известно, что стабильный квазипорядок на группе однозначно определяется инвариантной подполугруппой.

Пусть отношение ρ'_N является стабильным квазипорядком группы H_n, определяемое нормальной подполугруппой N.

Определим следующим образом бинарное отношение ρ_N на M:
$(i, g_1, \lambda)\ \rho_N\ (i', g_2, \lambda')$ тогда и только тогда, когда $g_1 \rho'_N g_2$ и $i = i'$, $\lambda = \lambda'$.

Далее, определим отношения $\Sigma(1; N)$, $\Sigma(2; N)$, $\overset{-1}{\Sigma}(2; N)$ на M:

$$\Sigma(1; N) = \{(\Theta, \Theta)\} \cup \rho_N;$$
$$\Sigma(2; N) = \{\Theta\} \times M \cup \rho_N;$$
$$\overset{-1}{\Sigma}(2; N) = M \times \{\Theta\} \cup \rho_N.$$

Обозначим $\Phi = \{\Sigma(1; N), \Sigma(2; N), \overset{-1}{\Sigma}(2; N)\}$.

Лемма 5. Отношения из Φ являются стабильными квазипорядками на M. Любой стабильный квазипорядок на M совпадает с одним из Φ отношений.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Элементами фактор-полугруппы $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$, которые отличны от $LR(V)$, являются одноэлементные подмножества, содержащие элементы из $LR(V)$. В дальнейшем мы будем одноэлементные подмножества из $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ отличные от $LR_n(V)$, отождествлять с элементами этого множества.

Отметим, что ненулевые H-классы полугруппы $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ совпадают с H-классами полугруппы $LR(V)$, содержащимися в D_n.

Каждый ненулевой H-класс полугруппы $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$, являющийся группой, изоморфен группе $GL(V_n)$. В силу леммы 5 тройка стабильных квазипорядков на $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ находится во взаимно однозначном соответствии с нормальными полугруппами произвольного ненулевого H-класса из $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$, являющегося группой.

С помощью изоморфизма φ^{-1} определяются стабильные квазипорядки, соответствующие $\rho_N \in \Phi$ на полугруппе $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$.

Из выше приведенного рассуждения следует теорема.

Теорема 2. Главный фактор $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ ($1 < n \leq \aleph_0$, $\dim V$) подгруппы $LR(V)$ является вполне o-простой полугруппой. Тройки стабильных квазипорядков на $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными полугруппами [5] произвольного ненулевого H-класса из $LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$, являющегося группой. Пусть N – такая нормальная подполугруппа и $\rho_N \in \Phi$. Тогда $(c, d) \in \rho_N$ тогда и только тогда, когда существуют a, b $\in LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$ такие, что c, d $\in$ aNb.

Замечание. Если F – поле, то в [6] дано описание нормальных подполугрупп полной линейной группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Маклейн С.*** Алгебра аддитивных отношений // Математика: Сб. переводов. 1963, № 7:6. С. 3-12.
2. ***Наумик М.И.*** Конгруэнции на полугруппах линейных отношений // Вопросы алгебры. Мн.: Университетское, 1986, вып. 2. С. 114-120.
3. ***Клиффорд А., Престон Г.*** Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972, т. 1. - 285 с.
4. ***Наумик М.И.*** Конгруэнции на полугруппе нулевых линейных отношений // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов: Университетское, 1993, вып. 11. С. 30-35.
5. ***Конторович П.Г.*** К теории полугрупп в группе // ДАН СССР, 1953. т.93, № 2. С.229-231.
6. ***Сиверцева Н.И.*** О простоте ассоциативной системы особенных квадратных матриц // Матем. сб. (нов. сер.), т.24, 1949. С. 101-106.

SUMMARY

The work represents the description of standard quasiorder by the subsemigroup $LR_1(V)$ and main factors of a semigroup of linear relation.