УДК 512.542

**Н.Т. Воробьев**

# О фраттиниевой двойственности в теории классов Фиттинга

Основополагающим результатом в теории формаций конечных групп явилась следующая известная характеризация локальных формаций, полученная Гашюцом, Любезедер и Шмидом [1,2]: формация $\mathfrak{F}$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ насыщена, то есть из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что группа $G$ из $\mathfrak{F}$. Как вытекает из [3], аналогичная характеризация локальных классов Фиттинга с использованием подгруппы $\psi_0(G)$, двойственной подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы $G$, невозможна. Напомним, что подгруппа $\psi_0(G)$ была введена и изучалась Гашюцом [4] как подгруппа из $G$, порожденная всеми минимальными подгруппами группы $G$. Дёрком и Хауком [5] (см. также [6]) было предложено использовать для характеризации классов Фиттинга фраттиниеву двойственность в следующем смысле. Пусть $\tau$ – оператор замыкания и $\psi_\tau(G)$ – наименьшая нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $\tau(\psi_\tau(G) \cap M) \supseteq \tau(M)$ для всех $M \lhd\lhd G$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют $\tau$-насыщенным или $E^{\Psi\tau}$-замкнутым, если из того, что $\psi_\tau(G) \in \mathfrak{F}$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Естественнен, как и для формаций, поиск характеризаций $\tau$-насыщенных классов Фиттинга. Дёрк и Хоукс сформулировали следующую общую проблему характеризации $\tau$-насыщенных классов Фиттинга.

**П р о б л е м а** [7, с. 829]. *Для данного оператора замыкания $\tau$ ($S_n \leq \tau$) какие классы Фиттинга в $\mathfrak{S}$ являются $\tau$-насыщенными ?*

В настоящей работе найдено счетное множество примеров семейств классов Фиттинга, для которых возможна такая характеризация.

Группу $G$ называют комонолитической, если она имеет единственную максимальную нормальную подгруппу. Рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Мы неоднократно будем использовать следующие известные свойства комонолитических групп [8], которые сформулируем в виде следующей леммы.

**Лемма 1.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, $G/N$ – комонолитическая группа и $S$ – минимальное субнормальное добавление к $N$ в $G$, то $S$ – комонолитическая группа*;
2) *если $N_1$, $N_2$ – такие нормальные подгруппы группы $G$, что $N_1N_2 \subset G$, $N_1 \cap N_2 = 1$ и $G/N_i$ – комонолитическая группа ($i=1, 2$), и $S$ – минимальное субнормальное добавление к $N_1N_2$ в $G$, то $S$ – такая комонолитическая группа, что $S/S \cap N_i \cong G/N_i$ для $i= 1, 2$. Кроме того, если $G/N_1N_2$ является $p$-группой, то $S/(S \cap N_1)(S \cap N_2)$ – нетривиальная циклическая $p$-группа*;

3) *если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и* p *– такое простое, что* $(G_1)_{\mathfrak{F}}$ *– единственная максимальная нормальная подгруппа индекса* p *в группе* $G_1$ *и* G *– комонолитическая не* p*-совершенная группа из* $\mathfrak{F}$, *то существует комонолитическая группа* S *со следующими свойствами:*
   a) S *имеет такие нормальные подгруппы* $S_1$ *и* $S_2$, *что* $S_1 \cap S_2 = 1$, $S/S_1S_2$ *– циклическая нетривиальная* p*-группа и* $S/S_i \cong G_i$ *для* $i = 1,2$;
   b) $S_{\mathfrak{F}}$ *– максимальная нормальная подгруппа из* S *индекса* p.

Непосредственной проверкой легко установить, что справедлива

**Лемма 2**. *Для каждого локального класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и любой комонолитической группы* $G \in \mathfrak{F}$ *с максимальной нормальной подгруппой индекса* p *регулярное сплетение* $G \operatorname{wr} C_p \in \mathfrak{F}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\tau_m$ – оператор, сопоставляющий каждому классу групп $\mathfrak{X}$ пересечение $\tau_m\mathfrak{X}$ всех тех m-кратно локальных классов Фиттинга [9], являющихся формациями, которые содержат $\mathfrak{X}$. Легко видеть, что $\mathfrak{X} \subseteq \tau_m\mathfrak{X} = \tau_m(\tau_m\mathfrak{X})$, и из того, что $\mathfrak{X}$ является подклассом класса групп $\mathfrak{H}$, следует $\tau_m\mathfrak{X} \subseteq \tau_m\mathfrak{H}$, то есть $\tau_m$ – оператор замыкания. Кроме того, очевидно $S_n \leq \tau_m$, где $S_n$ – оператор нормальной наследственности. В случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$, мы будем обозначать $\tau_m\{G\}$ через $\tau_mG$.

Следующая теорема дает ответ на указанный во введении вопрос для счетного множества примеров семейств классов Фиттинга и классифицирует локальные классы Фиттинга, являющиеся формациями.

**Теорема**. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* m*-кратно локальный класс Фиттинга* ($m \geq 1$). *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является формацией, когда* $\mathfrak{F}$ $\tau_m$*-насыщен.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – m-кратно локальный класс Фиттинга, который является формацией. Покажем, что класс $\mathfrak{F}$ является $\tau_m$-насыщенным. Предположим, что это не так. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая что $\Psi_m(G) \in \mathfrak{F}$ и $G \overline{\in} \mathfrak{F}$. Пусть M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G. Вначале установим, что $\psi_{\tau_m}(M) \subseteq \psi_{\tau_m}(G)$. Пусть K – любая субнормальная подгруппа группы M. Тогда, очевидно, K так же субнормальна в G и поэтому

$$\tau_mK = \tau_m(K \cap \psi_{\tau_m}(G)) = \tau_m(K \cap (M \cap \psi_{\tau_m}(G))).$$

Следовательно, $\psi_{\tau_m}(M) \subseteq M \cap \psi_{\tau_m}(G) \subseteq \psi_{\tau_m}(G)$. Отсюда $\psi_{\tau_m}(M) \in \mathfrak{F}$ и по индукции $M \in \mathfrak{F}$. Значит, $M = G_{\mathfrak{F}}$ и G – одноглавая группа.

Так как $G \in \tau_mG$ и $G_{\mathfrak{F}}$ – нормальная подгруппа из G, то $G_{\mathfrak{F}} \in \tau_mG$. Следовательно,

$$\tau_mG_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau_mG.$$

Если $\tau_mG_{\mathfrak{F}} = \tau_mG$, то $G \in \tau_mG_{\mathfrak{F}}$. Но $\tau_mG_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau_m\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\tau_mG_{\mathfrak{F}} \subset \tau_mG$ и поэтому $G = \psi_{\tau_m}(G) \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{F}$ $\tau_m$-насыщенный класс Фиттинга. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{F}$ является формацией. Выделим два этапа при доказательстве этого утверждения.

1. Докажем, что $\mathfrak{F}$ – радикальный гомоморф.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является радикальным гомоморфом. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in \mathfrak{F}$ и $G/K \overline{\in} \mathfrak{F}$ для некоторой нормальной подгруппы K группы G. Тогда в группе G/K существует такая субнормальная подгруппа $H/K \overline{\in} \mathfrak{F}$, все собственные нормальные подгруппы которой являются $\mathfrak{F}$-группами. Пусть $L/K$ – $\mathfrak{F}$-радикал группы $H/K$. Согласно выбору группы $G$, мы можем положить $L = G$. Следовательно, $G/K$ – группа с единственной максимальной нормальной подгруппой $(G/K)_{\mathfrak{F}}$ . Но тогда индекс $|G/K : (G/K)_{\mathfrak{F}}| = p$, где $p$ – некоторое простое число. Пусть $S$ – минимальное субнормальное добавление к группе $K$ в группе $G$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F}$ и по утверждению 1 леммы 1. $S$ – комонолитическая группа. Кроме того, $G/K \cong S/S \cap K \overline{\in} \mathfrak{F}$. Но тогда, согласно выбору группы $G$, мы можем положить $S = G$ и группа $G$ является комонолитической группой из $\mathfrak{F}$. Так как $G \in \tau_m G$ и класс $\tau_m G$ – радикальный гомоморф, то $G/K \in \tau_m G$. Следовательно, имеет место включение

$$\tau_m(G/K) \subseteq \tau_m G. \qquad (1)$$

Так как $G$ – комонолитическая группа, то $G$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $M$. Отсюда мы получаем, что $\tau_m M \subseteq \tau_m G$.

Предположим теперь, что справедливо равенство

$$\tau_m M = \tau_m G. \qquad (2)$$

Пусть $\overline{G} = G/K$. Так как $\overline{G}$ – комонолитическая группа с максимальной нормальной подгруппой $\overline{G}_{\mathfrak{F}}$ и $|\overline{G} : \overline{G}_{\mathfrak{F}}| = p$, и $G$ – комонолитическая не $p$-совершенная группа из $\mathfrak{F}$, то, по утверждению 3 леммы 1, существует комонолитическая группа $R$ со следующими свойствами:

(а) $R$ имеет такие нормальные подгруппы $R_1$ и $R_2$, что $R_1 \cap R_2 = 1$, $R/R_1R_2$ – циклическая нетривиальная $p$-группа, $R/R_1 \cong G$, $R/R_2 \cong \overline{G}$ и $R_{\mathfrak{F}}/R_1 \cong M$, $R_{\mathfrak{F}}/R_2 \cong \overline{G}_{\mathfrak{F}}$.

(б) $R_{\mathfrak{F}}$ – максимальная нормальная подгруппа индекса $p$ в группе $R$.

Но тогда $R/R_1 \in \tau_m G$ и, ввиду (1), $R/R_2 \in \tau_m G$. Следовательно, ввиду того, что группа $R/R_1R_2$ нильпотентна и по лемме 5 из [10] $\tau_m G$ – класс Локетта, по обобщенной квази-$R_0$-лемме [7, X.2.1] вытекает, что $R \in \tau_m G$, и поэтому справедливо включение

$$\tau_m R \subseteq \tau_m G.$$

С другой стороны, ввиду (а), группа $G$ является гомоморфным образом группы $R$, и поэтому $G \in Q(\tau_m R) = \tau_m R$. Следовательно, $\tau_m G \subseteq \tau_m R$ и мы доказали равенство $\tau_m R = \tau_m G$. Аналогично, из того, что $M \in QR_{\mathfrak{F}} \subseteq Q(\tau_m R_{\mathfrak{F}}) = \tau_m R_{\mathfrak{F}}$, следует $\tau_m M \subseteq \tau_m R_{\mathfrak{F}}$.

Таким образом, ввиду предположения (2), мы получили, что

$$\tau_m G = \tau_m M \subseteq \tau_m R_{\mathfrak{F}} \subseteq \tau_m R = \tau_m G.$$

Значит, $\tau_m R_{\mathfrak{F}} = \tau_m R$. Это означает, что $\psi_{\tau_m}(R) \subseteq R_{\mathfrak{F}}$, и поэтому $\psi_{\tau_m}(R) \in \mathfrak{F}$. Но по условию класс $\mathfrak{F}$ $\tau_m$-насыщенный, и поэтому $R \in \mathfrak{F}$ , что противоречит условию (б). Следовательно, предположение (2) невозможно. Остается принять случай, когда имеет место включение

$$\tau_m M \subset \tau_m G. \qquad (3)$$

Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = G \operatorname{wr} C_p$, где $C_p$ – циклическая группа порядка $p$. Пусть $M^* = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{p}$ – подгруппа базисной группы $G^*$ сплетения $\Gamma$ (напомним, что в данном случае $M = G_{\tau_m M}$ – максимальная нормальная подгруппа индекса $p$ в $G$). Так как $\Gamma/M^* \cong (G/M) \operatorname{wr} C_p$, то $\Gamma/M^* \cong C_p \operatorname{wr} C_p$. Но, по свойству сплетений [7, A.18.11], сплетение $C_p \operatorname{wr} C_p$ имеет циклическую подгруппу $C$ порядка $p^2$ такую, что пересечение базисной группы из $C_p \operatorname{wr} C_p$ с $C$

является группой порядка р. Обозначим через $\overline{C}$ полный прообраз группы C в Г. Так как $\Gamma/M^*$ нильпотентная группа, то $\overline{C}$ – субнормальная подгруппа группы Г. Более того, из изоморфизма $\Gamma/M^* \cong C_p \mathrm{wr}\, C_p$ следует, что $\overline{C}/M^* \cong C$ является циклической группой порядка $p^2$ и $\overline{C} \cap G^*/M^*$ – подгруппа порядка р группы $\overline{C}/M^*$. Так как G – группа из локального радикального класса $\tau_m G$, то, по лемме 2, $\Gamma \in \tau_m G$. Но тогда из того, что $\overline{C} \lhd\lhd \Gamma$, следует, что $\overline{C} \in \tau_m G$. Следовательно, $\tau_m \overline{C} \subseteq \tau_m G$.

С другой стороны, по лемме 5 из [10], класс Фиттинга $\tau_m \overline{C}$ является классом Локетта. Поэтому из того, что $\overline{C} \not\subseteq G^*$, по лемме X.2.1 а) [7], следует, что $\Gamma \in \tau_m \overline{C}$. Но тогда и группа $G \in \tau_m \overline{C}$. Следовательно, $\tau_m G \subseteq \tau_m \overline{C}$ и поэтому справедливо равенство

$$\tau_m \overline{C} = \tau_m G.$$

Но, ввиду леммы 2, $\Gamma \in \tau_m G$ и поэтому $\tau_m \Gamma \subseteq \tau_m G$. С другой стороны, так как $\overline{C} \lhd\lhd \Gamma$, то $\tau_m \overline{C} \subseteq \tau_m \Gamma$.

Таким образом, учитывая доказанное выше равенство, мы показали справедливость следующих равенств:

$$\tau_m \overline{C} = \tau_m G = \tau_m \Gamma. \tag{4}$$

Пусть теперь F – минимальное субнормальное добавление к подгруппе $M^*$ в группе $\overline{C}$. Тогда, очевидно, $\tau_m F \subseteq \tau_m \overline{C}$. Если бы $F \subseteq G^*$, то и $\overline{C} \subseteq G^*$, что невозможно. Поэтому $F \not\subseteq G^*$ и из того, что $\tau_m F$, по лемме 5 из [10] – класс Локетта, вытекает, по лемме X.2.1 а) [7], что $\Gamma \in \tau_m F$. Следовательно, ввиду равенства (4), $\tau_m \overline{C} = \tau_m \Gamma \subseteq \tau_m F$ и поэтому имеет место равенство

$$\tau_m F = \tau_m \overline{C} = \tau_m G. \tag{5}$$

Так как $\overline{C}/M^*$ – комонолитическая группа, то, по утверждению 1 леммы 1, добавление F к $M^*$ является также комонолитической группой. Кроме того, ввиду изоморфизма $F/F \cap M^* \cong \overline{C}/M^*$, группа $F/F \cap M^*$ – циклическая порядка $p^2$ и $F \cap G^*$ – ее максимальная нормальная подгруппа. Покажем теперь справедливость равенства

$$\tau_m F = \tau_m(F \cap G^*). \tag{6}$$

Если $\overline{C}_{\tau_m(F \cap G^*)} \not\subseteq G^*$, то, ввиду того, что, по лемме 5 из [10], класс Фиттинга $\tau_m(F \cap G^*)$ является классом Локетта, по лемме X.2.1 а) [7], следует $\Gamma \in \tau_m(F \cap G^*)$. Но, вспоминая, что $\overline{C} \lhd\lhd \Gamma$, имеем $\overline{C} \in \tau_m(F \cap G^*)$, и поэтому из субнормальности F в $\overline{C}$ следует $F \in \tau_m(F \cap G^*)$. Значит, $\tau_m F \subseteq \tau_m(F \cap G^*)$. Обратное включение очевидно.

Предположим теперь, что $\overline{C}_{\tau_m(F \cap G^*)} \subseteq G^*$. Если $\overline{C}_{\tau_m(F \cap G^*)} = G^*$, то это противоречит тому, что $G^* \not\subseteq \overline{C}$.

Остается рассмотреть случай:

$$\overline{C}_{\tau_m(F \cap G^*)} \subseteq (G^*)_{\tau_m M} = M^* \subset G^*.$$

Заметим, что к этому случаю приводят те соображения, что по лемме 5 из [10], радикалы прямых произведений групп для локальных классов Фиттинга совпадают с прямыми произведениями радикалов этих групп для этих классов, и поэтому между радикалами групп G и $G^*$ существует взаимно-однозначное соответствие.

Но подгруппа $F \cap G^* \not\subseteq M^*$, и поэтому случай $\overline{C}_{\tau_m(F\cap G^*)} \subseteq M^*$ невозможен. Итак, остается признать, что $\overline{C}_{\tau_m(F\cap G^*)} \subseteq G^*$ и тем самым равенство (6) доказано.

Но тогда из равенства (5) следует, что $\psi_{\tau_m}(F) \subseteq F \cap G^* \in \mathfrak{F}$. Следовательно, из того, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ $\tau_m$-насыщенный, имеем $F \in \mathfrak{F}$. Теперь, ввиду (5), в равенстве (1) заменим $\tau_m G$ на $\tau_m F$, равенство (2) – на равенство (6) и, проведя для групп $\overline{G}$ и F рассуждения, аналогичные рассуждениям, указанным выше для групп $\overline{G}$ и G, мы построим, применяя утверждение 3 леммы 1, такую комонолитическую группу $R^*$, которая не принадлежит $\mathfrak{F}$. Но $\psi_{\tau_m}(R^*) \in \mathfrak{F}$ и ввиду $\tau_m$-насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $R^* \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что класс $\mathfrak{F}$ – радикальный гомоморф.

2. Докажем, что $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно подпрямых произведений.

Это утверждение установим также индукцией по порядку группы G. Пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда в группе G найдутся такие нормальные подгруппы $K_1$ и $K_2$, что $G/K_i \in \mathfrak{F}$ и $G \overline{\in} \mathfrak{F}$ (i = 1,2), причем $K_1 \cap K_2 = 1$.

Покажем вначале, что если $K_1K_2 \subset G$, то G – одноглавая группа с максимальной нормальной подгруппой $G_{\mathfrak{F}}$ индекса p, для некоторого простого числа p. Предположим, что $L/K_1$ – максимальный нормальный делитель группы $G/K_1$. Тогда $L/K_1 \in \mathfrak{F}$. Кроме того, ввиду изоморфизма $L/L \cap K_2 \cong LK_2/K_2$, группа $L/L \cap K_2 \in \mathfrak{F}$. Но тогда, применяя индукцию, мы можем считать, что $L \in \mathfrak{F}$. Если в $G/K_1$ существует другой максимальный нормальный делитель $L_1/K_1$, то аналогично $L_1 \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G = L_1L_2 \in \mathfrak{F}$ и получаем противоречие с выбором G. Следовательно, $G/K_1$ – комонолитическая группа. Аналогично легко видеть, что и $G/K_2$ – комонолитическая группа.

Предположим, что H – минимальное субнормальное дополнение к группе $K_1K_2$ в G. Тогда, ввиду того, что $G/K_i$ (i = 1,2) – одноглавая группа, по утверждению 2 леммы 1 следует, что H такая комонолитическая группа, что $H/H \cap K_i \cong G/K_i$. Так как $|K_1K_2| < |G|$ и $K_1K_2/K_i \in \mathfrak{F}$ (i = 1,2), то $K_1K_2 \in \mathfrak{F}$. Но тогда из того, что $G \overline{\in} \mathfrak{F}$, вытекает, что $H \overline{\in} \mathfrak{F}$. Ввиду указанного выше изоморфизма $H/H \cap K_i \in \mathfrak{F}$. Тогда, учитывая минимальность выбора группы G, получаем H = G и G – комонолитическая группа с максимальной нормальной подгруппой $G_{\mathfrak{F}}$ индекса p.

Применим теперь утверждение 3 леммы 1 для комонолитических групп $G/K_1$ и $G/K_2$. Согласно этому утверждению существует такая комонолитическая группа M, которая содержит две максимальные нормальные подгруппы $M_1$ и $M_2$ со следующими свойствами: $M_1 \cap M_2 = 1$, $M/M_1M_2$ – нетривиальная циклическая p-группа и $M/M_i \cong G/K_i$ для i = 1,2. Так как $G/K_i \in \mathfrak{F}$, то по квази-$R_0$-лемме [7, IX.1.13] следует, что $M \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 5 из [9] класс Фиттинга $\tau_m M$ является классом Локетта, то при данных условиях мы можем применить усиленный вариант квази-$R_0$-леммы [7, X.1.24], согласно которому $G/K_i \cong M/M_i \in \tau_m M$ для i = 1,2. Следовательно, $G \in \tau_m M$ и имеет место включение

$$\tau_m G \subseteq \tau_m M. \qquad (7)$$

Таким образом, мы показали, что G – комонолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой $G_{\mathfrak{F}}$ индекса p и M – комонолитическая группа из $\mathfrak{F}$.

Теперь, следуя случаю 1, путем очевидных изменений и замен (1) на (7) и групп $\overline{G}$ на G, а G на M, мы придем к противоречию с $\tau_m$-насыщенностью класса $\mathfrak{F}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось выяснить $R_0$-замкнутость класса $\mathfrak{F}$ в случае, когда $G = K_1K_2$. В данном случае имеют место изоморфизмы $K_2 \cong G/K_1$ и $K_1 = G/K_2$ и, следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Если m = 1, то $\tau_m$-насыщенный класс Фиттинга естественно называть насыщенным.

***Следствие****. Тогда и только тогда локальный класс Фиттинга является формацией, когда он насыщенный.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. ***Gaschütz W., Lubeseder U.*** Kennzeichnung gessätigter Formationen // Math.Z., 1963, bd.82, N 2. S. 198-199.
2. ***Schmid P.*** Every saturated is a local formation // J.Algebra, 1978, vol.51,N1. P.144-148.
3. ***Hartley B.*** On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math., 1969, vol.3, N 2. P. 193-207.
4. ***Gaschütz W.*** Über das Frattinidual // Arch. Math., 1965, bd.16, N 1. S. 1-2.
5. ***Doerk K., Hauck P.*** Über Frattiniduale in endlichen Gruppen // Arch. Math., 1980, bd.35, N 3. S. 218-227.
6. ***Doerk K., Hauck P.*** Frattiniduale und Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen // J.Algebra, 1981, vol.69, N 4. P.402-415.
7. ***Doerk K., Hawkes T.O.*** Finite Soluble Groups // De Gruyter Exp. in Math., vol.4. Berlin-New York, 1992. - 891 p.
8. ***Doerk K.*** Über dan Rand einer Fittingklasses auflosbarer Gruppen // J.Algebra, 1978, vol.51, N 4. P. 619-630.
9. ***Воробьев Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. Ж., 1996, т. 37, № 5. С. 1296-1302.
10. ***Воробьев Н.Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки, 1988, т. 43, вып. 2. С.161-168.



## S U M M A R Y

*It is proved that if $\mathfrak{F}$ is a m-multiply local Fitting class, then $\mathfrak{F}$ is a formation if and only if $\psi_{\tau_m}(G) \in \mathfrak{F}$, where $\psi_{\tau_m}(G)$ is a minimal normal subgroup of the group G such that $\tau_m(\psi_{\tau_m}(G) \cap M) \supseteq \tau_m M$ for every subnormal subgroup M of G and $\tau_m$: $\mathfrak{X} \to \cap\{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}$ is a m-multiply local Fitting class and formation, containing $\mathfrak{X}\}$.*