УДК 519.4

Т.П. Вишневская

О факторизациях p-локальных формаций

Все рассматриваемые нами группы конечны. Кроме стандартной терминологии [1-3] нами используются некоторые определения и обозначения работы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [4].

Каждая функция вида

$$f:\{p\} \cup \{p'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называется p-локальным спутником. Символом G_{pd} обозначается наибольшая в G подгруппа, у которой все ее композиционные факторы являются pd-группами.

Если f – некоторый p-локальный спутник, то $LF_p(f) = (G \mid G/G_{pd} \in f(p')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$, если p делит $|G|$).

Если формация F такова, что $F = LF_p(f)$ для некоторого p-локального спутника f, то говорят [4], что F – p-локальная формация и f – p-локальный спутник F.

Формация F называется локальной, если она p-локальна для всех простых чисел p.

Хорошо известно, что произведение любых двух локальных (p-локальных) формаций снова является локальной (соответственно p-локальной) формацией. Первые примеры локальных произведений нелокальных формаций были построены проф. Н.Т. Воробьевым [5] и проф. В.А. Ведерниковым [6]. Следующая теорема распространяет этот результат на p-локальные формации.

Теорема 1. *Существует континуум p-локальных формаций* F *вида* F = MH, *где* M *и* H *– не p-локальные формации.*

В следующих двух теоремах изучаются условия, при которых произведение некоторой фиксированной формации на произвольную непустую формацию является p-локальной формацией.

Теорема 2. *Пусть* M *– формация. Тогда в том и только в том случае произведение* MH *является p-локальной формацией для каждой неединичной и непустой формации* H, *когда* M *– такая p-локальная формация, что* $N_p \subseteq M$.

В этой теореме N_p обозначает класс всех p-групп. Символом N_ω, где ω – непустое множество простых чисел, обозначается класс всех нильпотентных ω-групп. Формация F называется ω-локальной, если она p-локальна для всех $p \in \omega$.

Следствие 1. *Пусть* ω *– произвольное непустое множество простых чисел,* M *– формация. Тогда в том и только в том случае произведение* MH *является* ω*-локальной формацией для каждой непустой и неединичной формации* H, *когда* M *– такая* ω*-локальная формация, что* $N_\omega \subseteq M$.

Следствие 2 ([7, Теорема I]). *Пусть* M *– формация. Тогда в том и только в том случае произведение* MH *является локальной формацией для каждой непустой и неединичной формации* H, *когда* M *– локальная формация полной характеристики.*

Теорема 3. *Пусть* H *– формация. Тогда в том и только в том случае произведение* MH *является p-локальной формацией для каждой непустой и неединичной формации* M, *когда* H = G *– класс всех групп.*

Следствие 3. *Пусть* ω *– некоторое непустое множество простых чисел,* H *– непустая формация. Тогда в том и только в том случае произведение*

МН *является ω-локальной формацией для любой непустой и неединичной формации* М, когда Н = G – *класс всех групп.*

Следствие 4 ([7, Теорема II]). *Пусть* Н – *формация. Тогда в том и только в том случае произведение* МН *является локальной формацией для каждой непустой и неединичной формации* М, *когда* Н = G – *класс всех групп.*

Пересечение всех p-локальных формаций, содержащих данную группу G, обозначают через $l_p$form G. Такая формация называется p-локальной формацией, порожденной группой G. Формация F называется однопорожденной p-локальной формацией, если F =$l_p$form G для некоторой группы G.

Несократимой факторизацией формации F называется [8] всякое представление F в виде произведения $F = F_1 F_2 \dots F_t$ ($t \geq 2$), где $F \neq F_1 F_2 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_t$ для всех $i \in \{1,2,\dots,t\}$.

Хорошо известно, что если F = МН – несократимая факторизация однопорожденной локальной формации F, то сомножитель М также является локальной формацией [9]. Следующая теорема показывает, что аналогичный факт верен и для p-локальных формаций.

Теорема 4. *Пусть* F = МН – *несократимая факторизация* p-*локальной формации* F. *Тогда формация* М *также является* p-*локальной.*

Теорема 5. *Пусть* F = МН – *несократимая факторизация формации* F, *где* $M \neq N_p$ *для всех простых* p. *Тогда в том и только в том случае* F *является однопорожденной* p-*локальной формацией, когда выполняются следующие условия:*

1) М – *однопорожденная* p-*локальная подформация из* $N_pN_{p'}$;

2) Н – *абелева однопорожденная формация, причем, если* $p \notin \pi(M)$, *то* $p \notin \pi(H)$;

3) $\pi(M) \cap \pi(H) \subseteq \{p\}$.

Теорема 6. *Пусть* F = МН – *несократимая факторизация формации* F, *где* $M = N_p$. *Тогда в том и только в том случае* F *является однопорожденной* p-*локальной формацией, когда однопорожденными являются следующие две формации:* form($A/O_p(A)$ | $A \in H$) *и* form(A/A_{pd} | $A \in H$).

Теоремы 4-6 развивают результаты работы [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. Walter de Gruyter. Berlin, New York, 1992. – 889 p.
2. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.– 272 с.
3. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.–254 с.
4. ***Скиба А.Н., Шеметков Л.А.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математически труды, 1999. Т.2, № 2. С.114-147.
5. ***Воробьев Н.Т.*** О факторизациях нелокальных формаций конечных групп // Вопросы алгебры. Минск, 1990. Вып.5. С.21-24.
6. ***Ведерников В.А.*** О локальных формациях конечных групп // Мат. заметки, 1989. Т.46, № 3. С.32-37.
7. ***Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M.D.*** Some questions of the Kourovka notebook concerning formation products // Comm. Algebra. V.26, № 5, 1998. P.1581-1587.
8. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
9. ***Skiba A.N.*** On nontrivial factorizations of a one-generated local formation of finite groups // Proc. Int. Conf. Algebra Dedicat. Rem. A.I. Mal'cev. Novosibirsk. 21-26 Aug. 1989.
10. ***Скиба А.Н., Рыжик В.Н.*** Факторизации p-локальных формаций // Вопросы алгебры. Гомель, 1997. Вып.11. С.114-118.

S U M M A R Y

The Factorisations of p-local formations are examined in this article.

Поступила в редакцию 16.10.2000