УДК 512.542

Р.В. Бородич

Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов

Все рассматриваемые группы конечны. Изучение групп с операторами является важной задачей в связи с их применением в решении различных классических проблем теории групп. В монографии [1] М.В. Селькиным построена общая теория пересечений максимальных подгрупп в конечных группах. В настоящей работе в соответствии с [1] рассматривается задача изучения свойств пересечений ядер некоторых абнормальных максимальных А-допустимых подгрупп группы G, имеющей заданную группу операторов А. Получены операторные аналоги результатов В. Гашюца [2], М.В. Селькина [1], В.В. Шлыка [3] и др.

Пусть А и G – некоторые группы и φ – некоторый фиксированный гомоморфизм группы А в группу Aut(G). В этом случае говорят, что задано действие группы А на группе G, и группа А является группой операторов группы G.

Предположим, что группа G имеет группу операторов А. Подгруппа $H\neq G$ группы G называется максимальной А-допустимой подгруппой в G, если Н является А-допустимой и любая собственная А-допустимая подгруппа из G, содержащая подгруппу Н, совпадает с Н.

Пусть π — некоторое множество (возможно пустое) простых чисел. Введем следующее обозначение.

M_π^a (G,A) — множество всех абнормальных максимальных А-допустимых подгруппа группы G, индексы которых не делятся на числа из фиксированного множества простых чисел π. С помощью M_π^a (G,A) определим:

$$\Delta_\pi(G,A)=\begin{cases}\cap M_G, M\in M_\pi^a(G,A), \text{ если } M_\pi^a\neq\varnothing;\\ G, \text{ если } M_\pi^a(G,A)=\varnothing.\end{cases}$$

Если $\pi=\varnothing$, то будем писать $\Delta_\pi(G,A)=\Delta(G,A)$.

Нетрудно видеть, что $\Delta_\pi(G,A)$ является нормальной А-допустимой подгруппой группы G.

Другие используемые в работе обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1,4]. Напомним только, что подгруппа Н группы G называется абнормальной в G, если $g\in\langle H,H^g\rangle$ для любого элемента $g\in G$.

Для доказательства основных результатов нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H – A-допустимая подгруппа группы G, то $N_G(H)$ также является A-допустимой подгруппой в G;

2) если $(|G|,|A|)=1$, и группа G обладает свойством C_π, то в G существует A-допустимая холлова π-подгруппа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) следует из теоремы 2.1.1 монографии [5].

Утверждение 2) доказывается аналогично утверждению 1) теоремы 6.2.2 из [5].

Лемма 2. *Пусть K – нормальная подгруппа из G, обладающая свойством C_π и H – холлова π-подгруппа из K. Тогда $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любого $x\in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H,H^x\rangle\subseteq K$, то есть H является пронормальной подгруппой в G. Тогда по лемме 17.1. из [4] подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G. Лемма доказана.

Следующая лемма 3 – это хорошо известный результат Томпсона [6].

Лемма 3. *Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P, характеристической в некоторой силовской подгруппе группы G выполняется, что $N_G(P)/C_G(P)$ является p-подгруппой.*

Теорема 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда подгруппа $\Delta(G,A)$ нильпотентна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $D=\Delta(G,A)$. Пусть $p\in\pi(D)$. По 2) леммы 1 в D существует A-допустимая силовская p-подгруппа P. По лемме Фраттини $G= N_G(P)D$.

По 1) леммы 1 подгруппа $N_G(P)$ является A-допустимой. Если $N_G(P)=G$, то $P\triangleleft G$, а значит, $P\triangleleft D$. Предположим, что $N_G(P)\neq G$. По лемме 2 подгруппа $N_G(P)$ является абнормальной в G. Следовательно, $N_G(P)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппе M группы G. Но тогда $D\subseteq M$ и $G=N_G(P)D=MD=M$. Получили противоречие с предположением $N_G(P)\neq G$. Итак, любая силовская подгруппа из D нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа $D=\Delta(G,A)$ нильпотентна. Теорема доказана.

Если положить $A=1$, то из теоремы 1 получаем известный результат Гашюца [2].

Теорема 2. *Пусть группа G не p-разрешима для некоторого нечетного простого числа p и имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) группа G имеет, по крайней мере, одну не p-нильпотентную абнормальную максимальную A-допустимую подгруппу;

2) пересечение ядер всех не p-нильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп совпадает с $\Delta(G,A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим справедливость утверждения 1). Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Так как группа G не p-разрешима, то $K=G^{\mathfrak{F}}\notin\mathfrak{F}$. Ясно, что K является A-допустимой группой.

Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $O_p(G)=1$. По 2) леммы 1 в K найдется A-допустимая силовская p-подгруппа P. Так как K не p-нильпотентна, то по лемме 3 в P найдётся характеристическая, а значит, A-допустимая подгруппа $R\neq 1$ такая, что $N_K(R)/C_K(R)$ не является p-группой.

Это означает, что $N_K(R)$ не является p-нильпотентной группой. Из A-допустимости R и 1) леммы 1 следует A-допустимость подгруппы $N_G(R)$. Из $N_K(R)\subseteq N_G(R)$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $N_G(R)\notin\mathfrak{F}$. Так как $O_p(G)=1$, то $N_G(R)\neq G$.

По лемме 2 $N_G(P)$ — абнормальная подгруппа в группе G. Так как $N_G(P)\subseteq N_G(R)$, то не трудно видеть, что $N_G(R)$ также является абнормальной подгруппой в G. Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$ является абнормальной и не p-нильпотентной, то в качестве искомой подгруппы выберем максимальную A-допустимую подгруппу, содержащую $N_G(R)$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть группа G не p-разрешима. Обозначим через D пересечение ядер всех не p-нильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп в группе G. Согласно доказанному утверждению 1) в G найдётся, по крайней мере, одна не p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа. Следовательно, $D\neq G$.

Очевидно, что $\Delta(G,A)\subseteq D$. Предположим, что $\Delta(G,A)\subset D$. Тогда в группе G найдется p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M такая, что $MD=G$. Отсюда следует, что $G/D\cong M/M\cap D\in\mathfrak{F}$, а значит G/D p-разрешима.

Чтобы получить противоречие, докажем p-разрешимость подгруппы D. Воспользуемся леммой 3. Пусть P – A-допустимая силовская p-подгруппа из D. По лемме Фраттини $G=DN_G(P)$. Тогда $N_G(P)=G$ или $N_G(P)$ является p-нильпотентной группой.

Пусть $N_G(P)=G$. Тогда $P\triangleleft G$, а значит D является p-разрешимой. Следовательно, p-разрешимой является группа G. Получили противоречие с выбором G.

Остается принять, что $N_G(P)\neq G$ и $N_G(P)$ p-нильпотентна. Если D p-нильпотентна, то рассуждая, как и выше, получаем p-разрешимость группы G. Противоречие. Поэтому будем считать, что D не p-нильпотентна.

Тогда по лемме 3 найдется характеристическая в P подгруппа P^* такая, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не является p-группой. Так как $N_G(P^*)\supseteq N_G(P)$, то $G=DN_G(P^*)$. Заметим, что P^* – A-допустимая, а $N_G(P^*)$ – A-допустимая абнормальная подгруппа в G. Поэтому возможны ситуации: $N_G(P^*)=G$ или $N_G(P^*)$ является p-нильпотентной группой.

Если $N_G(P^*)$ p-нильпотентна, то $N_D(P^*)$ также является p-нильпотентной группой. Тогда по лемме 3 получаем, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ – p-группа. Получили противоречие.

Остается рассмотреть случай, когда $P^*\triangleleft G$ и $N_G(P^*)/C_G(P^*)$ – не p-группа. Заметим, что $P^*\neq P$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что P^*– максимальная среди характеристических подгрупп группы P, обладающая отмеченными выше свойствами.

Рассмотрим группу G/P^*. Из A-допустимости P^* следует, что A является группой операторов для G/P^*. Так как G/P^* – не p-разрешима, то D/P^* не p-нильпотентна. Тогда по лемме 3 в P/P^* найдётся характеристическая подгруппа P_0/P^* такая, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ не является p-группой. Заметим, что P_0 – характеристическая подгруппа в P. Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ является p-группой. Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*) = N_D(P_0)/P^*$ и $C_{D/P^*}(P_0/P^*) \supseteq C_D(P_0)P^*/P^*$. Тогда $N_D(P_0)/P^*/C_D(P_0)/P^*\cong N_D(P_0)/C_D(P_0)$ является p-группой. Теперь нетрудно заметить, что p-группой является и группа $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Получили противоречие. Следовательно, D/P^* p-нильпотентна, а значит D – p-разрешимая группа. Отсюда и из p-разрешимости G/D следует p-разрешимость группы G. Получили противоречие. Следовательно, $D=\Delta(G,A)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда в произвольной неразрешимой группе существуют ненильпотентные абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы, причем пересечение ядер всех таких подгрупп нильпотентно.*

Доказательство. Так как G – неразрешимая группа, то по теореме Фейта-Томпсона $2\in\pi(G)$, и найдется такое простое нечетное число p, что G не p-разрешима. Поскольку множество всех ненильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп содержит множество всех не p-нильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, то результат следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Если положить A=1, то из теорем 2 и 3 вытекают соответствующие результаты Шлыка из [3].

Перейдём к изучению подгруппы $\Delta_\pi(G,A)$ в случае, когда π – некоторое непустое множество простых чисел.

Лемма 4. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда, если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N\subset\Delta_\pi(G,A)$, то*

$$\Delta_\pi(G/N,A)=\Delta_\pi(G,A)/N.$$

Доказательство осуществляется проверкой.

Теорема 4. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, и подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π. Тогда*

$$\Delta_\pi(G,A)/O_\pi(G)=\Delta(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Пусть $\Delta_\pi(G,A)=D$. Очевидно, что $O_\pi(G)\subseteq D$. По 2) лемме 1 в D найдётся A-допустимая холлова π-подгруппа H. Тогда по лемме Фраттини $G=DN_G(H)$. По 1) леммы 1 $N_G(H)$ — A-допустимая подгруппа в G.

Предположим, что $N_G(H)\neq G$. Тогда по лемме 2 подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G. Поэтому в G найдётся абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M такая, что $N_G(H)\subseteq M$.

Легко проверить, что $\pi(|G:N_G(H)|)\cap\pi=\varnothing$. Отсюда и из $N_G(H)\subset M$ следует, что $D\subseteq M$. Но тогда $G=DN_G(H)=DM=M$. Получили противоречие.

Остается принять, что $H\triangleleft G$. Отсюда следует, что $\pi(|D/O_\pi(G)|)\cap\pi=\varnothing$.

Очевидно, что $\Delta(G/O_\pi(G),A)\subseteq D/O_\pi(G)$.

Предположим, что $\Delta(G/O_\pi(G),A)\subset D/O_\pi(G)$. Тогда в G найдется абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа R такая, что $O_\pi(G)\subset R$ и $RD=G$. Заметим, что $|G:R|=|D:(D\cap R)|$, а значит $\pi(|G:R|)\cap\pi=\varnothing$. Но тогда $D\subset R$. Получили противоречие с выбором R. Таким образом, $\Delta(G/O_\pi(G),A)=D/O_\pi(G)$. Теорема доказана.

Учитывая теорему 1, получаем следующее

Следствие 4.1. *Пусть G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$ и подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π. Тогда $\Delta_\pi(G,A)/O_\pi(G)$ нильпотентна.*

Если $\pi=\{p\}$, где p – некоторое простое число, то подгруппу $\Delta_\pi(G,A)$ будем обозначать через $\Delta_p(G,A)$.

Следствие 4.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда $\Delta_p(G,A)/O_p(G)=\Delta(G/O_p(G),A)$. В частности, $\Delta_p(G,A)/O_p(G)$ нильпотентна.*

Если положить A=1, то получаем

Следствие 4.3. *Пусть подгруппа $\Delta_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда*

$$\Delta_\pi(G)/O_\pi(G)=\Delta(G/O_\pi(G)).$$

В частности, $\Delta_\pi(G)/O_\pi(G)$ нильпотентна.

Теорема 5. *Пусть p и q – простые различные числа. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что (|G|,|A|)=1 справедливо равенство*

$$\Delta_p(G,A)\cap\Delta_q(G,A)=\Delta(G,A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно $\Delta_p(G,A)\cap\Delta_q(G,A)\supseteq\Delta(G,A)$. Пусть $K=\Delta_p(G,A)\cap\Delta_q(G,A)$ и $\Delta(G,A)\subset K$. Тогда в G найдется, абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M такая, что G=MK. Если |G:M| не делится на $t\in\{p,q\}$, то $\Delta_t(G,A)\subseteq M$. Следовательно, KM=M, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на p и q.

Пусть $O_p(G)=1$. Тогда ввиду теоремы 4 имеем равенство $\Delta_p(G,A)=\Delta(G,A)$. Поэтому $K\subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K. Значит, $O_p(G)\neq 1$. Если $O_p(G)$ M= G, то |G:M| делится на p, но не делится на q. Противоречие. Поэтому $O_p(G)\subseteq M$. На основании следствия 4.2 имеем $\Delta_p(G,A)/O_p(G)=$ $=\Delta_p(G/O_p(G),A)\subseteq M/O_p(G)$. Отсюда следует, что $\Delta_p(G,A)\subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остается заключить, что $\Delta_p(G,A)\cap\Delta_q(G,A)=$ $=\Delta(G,A)$. Теорема доказана.

При A=1 из теоремы 5 получаем следующий известный результат (см. [1]).

Следствие. *Для любой группы G выполняется равенство* $\Delta_p(G)\cap\Delta_q(G)=\Delta(G)$, *в частности, это пересечение нильпотентно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Селькин М.В.*** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн., 1997. – 144 с.
2. ***Gaschutz W.*** Uber die Ф-Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z., 1953. Bd. 58. S. 160 -170.
3. ***Шлык В.В.*** О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Матем. заметки, 1973. Т. 14, № 3. С. 429-439.
4. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М., 1978. – 272 с.
5. ***Gorenshtein D.*** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. -572 p.
6. ***Thompson J.G.*** Normal p-complements for finite groups // J. Algebra, 1964. V. 1. P. 43-46.

S U M M A R Y

The properties of the intersections of cores of some abnormal maximal A-admissible subgroups of a group G are studied.

Поступила в редакцию 15.04.2003