УДК 512.542

В.Н. Семенчук, С.А. Мокеева

Конечные группы с $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами

Центральной задачей любой содержательной математической теории является задача о разумной классификации и конструктивном описании тех исследуемых в ней объектов, которые наиболее полезны в различных приложениях. Реализация такой задачи всегда связана с разработкой новых методов исследования, которые в конечном счете составляют основное идейное богатство данной теории. Такая тенденция ярко проявилась на примере развития теории конечных непростых групп в последние три десятилетия. В монографии Л.А. Шеметкова [1] отмечалось, что хотя теория конечных групп никогда не испытывала недостатка в общих методах, идеях и нерешенных проблемах, все же обилие полученных результатов с неизбежностью привело к необходимости разработки новых методов и систематизирующих точек зрения.

Одной из таких систематизирующих и, как оказалось, весьма перспективных точек зрения явилась идея Гашюца о том, что внутреннее строение конечной группы удобно исследовать по отношению к некоторому фиксированному классу групп, названному Гашюцом локальной формацией.

Напомним, что локальной формацией конечных групп называется класс конечных групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, подпрямых произведений и фраттиниевых расширений. Такой подход к изучению строения конечных групп привлек внимание многих специалистов по алгебре, и исследования, связанные с локальными формациями, составили одно из доминирующих направлений современной теории классов групп.

С середины шестидесятых годов задача конструирования и классификации локальных формаций занимает одно из центральных мест в исследованиях по теории классов конечных групп. К концу 70-х годов благодаря работам таких известных алгебраистов, как Гашюц, Кегель, Хоукс, Брайс, Косси, Л.А. Шеметков, сформировался круг проблем, связанных с общей задачей классификации локальных формаций.

Отметим, что данная проблематика дала естественный толчок к анализу общей проблемы классификации локальных формаций. В настоящее время реализация этой задачи идет в основном по пути выделения и описания различных типов локальных формаций, важных для приложений.

Настоящая работа посвящена развитию данного направления. В работе рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1,2].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппу K группы G назовем F-достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_n = K$$

такая, что для любого $i=1,2,\ldots,n$, либо подгруппа K_i нормальна в K_{i-1}, либо $(K_{i-1})^F \subset K_i$.

Будем говорить, что нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$ обладает свойством (*), если она содержит любую группу вида G = AB, где A и B – $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы из G.

Напомним, что через $\mathfrak{H}_\pi$ обозначается множество всех π-групп из класса $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$ – множество всех разрешимых групп, $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{F}$, $EK(\mathfrak{F})$ – класс всех групп, у которых каждый композиционный фактор является композиционным фактором группы из $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, обладающая свойством (*), f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p)$ *для любого простого числа* p *из* $\pi(\mathfrak{F})$;
2) $EK(f(p)) \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p)$ *для всех простых чисел p из $\pi(\mathfrak{F})$, для которых f(p) – локальная формация.*

Напомним, что формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется 2-кратно локальной, если для любого простого p формация f(p) либо пуста, либо является локальной.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – 2-кратно локальная формация, обладающая свойством (*), f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $EK(f(p)) \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p)$ для любого простого числа p из $\pi(\mathfrak{F})$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая локальная наследственная формация, обладающая свойством (*), f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $f(p) = \mathfrak{F}_{\pi(f(p))}$ для любого простого числа p из $\pi(\mathfrak{F})$.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая локальная наследственная формация, обладающая свойством (*), f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого простого числа p из $\pi(\mathfrak{F})$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ – наследственная формация. Тогда всякая формация вида $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i} \mathfrak{X}_{\pi_j}$ обладает свойством (*).*

Следствие. *Любая формация $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$ обладает свойством (*).*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая разрешимая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ – формация, обладающая свойством (*);*
2) $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$.

Будем говорить, что нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, если для любой группы G выполняется следующее условие: если A и B – произвольные $\mathfrak{F}$-достижимые перестановочные подгруппы из G, то AB – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ – наследственная формация. Тогда всякая формация вида $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i} \mathfrak{X}_{\pi_j}$ обладает решеточным свойством для перестановочных F-достижимых подгрупп.*

Следствие. *Любая формация $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$ обладает решеточным свойством для перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп.*

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая разрешимая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ – формация, обладающая решеточным свойством для перестановочных F-достижимых подгрупп;*
2) $\mathfrak{F} = \bigcap_{i,j \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М., 1978. – 267 с.
2. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Формации алгебраических систем. М., 1989. – 256 с.

SUMMARY

In this paper the classification of hereditary soluble formations $\mathfrak{F}$ with the lattice property for permutable $\mathfrak{F}$-composition subgroups is obtained.

Поступила в редакцию 15.12.2002