Ученые записки • Естественные науки • Математика

Том 1 • 2002

УДК 512.542

Метод Хартли для инъекторов

Н.Т. Воробьев, И.В. Дудкин

Настоящая работа посвящена применению локального метода Хартли к решению задачи описания строения инъекторов конечных разрешимых групп.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то подгруппу $\mathfrak{V}$ группы $\mathfrak{G}$ называют ее $\mathfrak{F}$-инъектором, если $V \bigcap N$ является максимальной из подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G) для любой нормальной подгруппы N из G.

В § 1 мы решаем задачу Хартли [1] построения инъекторов групп посредством радикалов. В частности, установлено, что для класса Хартли $\mathfrak{H}$ [1], $\mathfrak{H}$-инъекторы группы G это, в точности, все те $\mathfrak{H}$-максимальные подгруппы группы G, которые содержат ее $\mathfrak{H}$-радикал. Находится также способ построения инъекторов групп посредством нильпотентных инъекторов их некоторых факторгрупп.

§ 2 посвящен описанию строения инъекторов групп посредством подгрупп Холла. При этом выделяется обширное семейство локальных классов Фитинга, для которых инъекторы группы факторизуются в виде ее некоторой подгруппы Холла и произведения радикалов для всех непустых значений функции Хартли.

В § 3 результаты, полученные в предыдущих параграфах, применяются для построения примеров инъекторов.

§ 1. Задача Хартли описания инъекторов

В теории конечных разрешимых групп хорошо известен результат Фишера [2] о том, что нильпотентные инъекторы ($\mathfrak{N}$-инъекторы) группы G, это в точности максимальные нильпотентные подгруппы группы G, содержащие радикал Фиттинга F(G).

Пусть $\Sigma = \{\pi_i : i \in I\}$ – семейство попарно-различных подмножеств π_i множества $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ такое, что $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \pi_i$. Функцию h: $\Sigma \to$ {непустые классы Фиттинга} будем называть функцией Хартли или H-функцией. Пусть

$$LH(h) = \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\, \mathfrak{S}_{\pi'_i}\, \mathfrak{S}_{\pi_i}.$$

Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ мы назовем классом Хартли, если $\mathfrak{H} = LH(h)$ для некоторой H-функции h. В этом случае мы будем говорить, что $\mathfrak{H}$ определяется локально H-функцией h.

Задачу описания $\mathfrak{H}$-инъекторов впервые рассмотрел Хартли [1]. Развивая указанный выше результат Фишера [2], для случая $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}$, он установил (см. 4.1.1 [1]), что $\mathfrak{H}$-инъекторами группы G являются в точности все те ее подгруппы V, для которых подгруппы V, для которых подгруппы $V/G_{\mathfrak{X}}$ нильпотентные инъекторы группы $G/ G_{\mathfrak{X}}$..

В настоящем разделе мы описываем $\mathfrak{H}$-инъекторы групп в общем случае. Для этой цели вначале изучим свойства H-функций, определяющих локально классы Хартли.

Пусть класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется локально H-функцией h. Функцию h назовем приведенной, если $h(\pi_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$.

Лемма 1.1. *Каждый класс Хартли определяется локально приведенной H-функцией.*

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 1.2. *Каждый класс Хартли определяется локально такой приведенной H-функцией* h, *что* $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\, S_{\pi'_j}$ *для всех* $i \neq j$ *из множества* I.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли. По лемме 1.1 $\mathfrak{H} = LH(h_1)$ для некоторой приведенной H-функции h_1.Следуя Хартли [1], построим теперь групповую функцию ψ такую, что

$$\psi(\pi_i) = \{G : G \cong H^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}\ (H \in h_1(\pi_i))\}$$

для всех $i \in I$.

Пусть X группа из класса $\psi(\pi_i)$ $(i \in I)$. Тогда $X \cong Y^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}$ для некоторой группы $Y \in h_1(\pi_i)$. Следовательно, $Y^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}} \in h_1(\pi_i)$ и поэтому $X \in h_1(\pi_i)$. Таким образом, $\psi \leq h_1$. Отсюда следует, что

$$\psi(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi'_i} \subseteq h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}.$$

Если же $Y_1 \in h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}$ $(i \in I)$, то $Y_1/(Y_1)_{h_1(\pi_i)} \in \mathfrak{S}_{\pi'_i}$ и поэтому, ввиду равенства $\left(Y_1^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}\right)^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}} = Y_1^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}$, следует, что $Y_1^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}} \in \psi(\pi_i)$. Значит, $Y_1 \in \psi(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi'_i}$. Итак, мы установили справедливость для всех $i \in I$ равенства

$$\psi(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi'_i} = h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}. \qquad (1)$$

(Заметим, что здесь под $\psi(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi'_i}$ мы понимаем произведение классов групп в том смысле, что $\psi(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi'_i}$ состоит из всех тех групп G, в которых существуют такие нормальные подгруппы $K \in \psi(\pi_i)$, что $G/K \in \mathfrak{S}_{\pi'_i}$.

Построим теперь функцию h следующим образом: $h(\pi_i) = \mathrm{Fit}\ \psi(\pi_i)$ для всех $i \in I$. Пусть

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}\ \mathfrak{S}_{\pi_i}.$$

Докажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Так как $\psi \leq h_1$, то $h \leq h_1$ и имеет место включение $h(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i} \subseteq h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}$ для всех $i \in I$. Но тогда из равенства (1) следует, что

$$\mathrm{Fit}(h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}) = h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i} = \mathrm{Fit}(\psi(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}).$$

Значит,

$$h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i} = \mathrm{Fit}(\psi(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}) \subseteq (\mathrm{Fit}(\psi(\pi_i))\ \mathfrak{S}_{\pi'_i} = h(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}.$$

Итак, мы показали, что для всех $i \in I$. имеет место равенство:

$$h(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i} = h_1(\pi_i)\ \mathfrak{S}_{\pi'_i}.$$

Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ и h является Н-функцией, определяющей локально класс $\mathfrak{H}$. Так как $h \le h_1$ и h_1 – приведенная Н-функция определяющая локально $\mathfrak{H}$, то и h – приведенная Н-функция.

Пусть теперь L – группа из класса $h_1(\pi_i)$ и π_j – любое подмножество множества $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \pi_i$, отличное от множества $\pi_i\,(i, j \in I)$. Так как $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$, то $\mathfrak{S}_{\pi_j} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi'_i}$ и поэтому $L^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}} \subseteq L^{\mathfrak{S}_{\pi'_j}}$. Но $L \in \mathfrak{H}$ и, значит, $L/L_{h_1(\pi_j)_{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}} \in \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Следовательно, $L^{\mathfrak{S}_{\pi_j}} \subseteq L_{h_1(\pi_j)_{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}}$. Значит $L^{\mathfrak{S}_{\pi_j}} \in h_1(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}$ и поэтому мы можем считать, что для всех групп из класса $h_1(\pi_j)$ их $\mathfrak{S}_{\pi'_i}$-корадикалы содержатся в классе $h_1(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}$. Тогда, если R – некоторая группа из класса $\psi(\pi_j)$, то $R \cong V^{\mathfrak{S}_{\pi'_i}}$ для некоторой группы $V \in h_1(\pi_i)$ и поэтому $R \in h_1(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}$. Следовательно,

$$\psi(\pi_i) \subseteq h_1(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}.$$

Но тогда, ввиду определения оператора «Fit», имеем:

$$h(\pi_i) = \mathrm{Fit}\ \psi(\pi_i) \subseteq \mathrm{Fit}(h_1(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}) = h_1(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j} = h(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}.$$

Лемма доказана.

Пусть в дальнейшем до конца параграфа $\mathfrak{H}$ – класс Хартли, определяемый локально приведенной Н-функцией, h такой, что $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}$ для всех $i \ne j$ из I (такая функция существует по лемме 1.2). Тогда подгруппу $G_h = \prod_{i \in I} G_{h(\pi_i)}$ назовем h-радикалом группы G.

Лемма 1.3. *Если* V *такая подгруппа группы* G, *что*

$$V/G_h \in \bigcap_{j \in I} \mathfrak{S}_{\pi'_j}\mathfrak{S}_{\pi_j},\ \textit{то}\ V \in \mathfrak{H}.$$

Доказательство. Так как $G_h \trianglelefteq V$, то

$$G_{h(\pi_j)} = (G_h)_{h(\pi_j)} = G_h \cap V_{h(\pi_j)} \subseteq V_{h(\pi_j)} \text{ для всех } j \in I.$$

Покажем, что $G_h / (G_h)_{h(\pi_j)}$ является π'_j-группой. Пусть π_i – любое множество простых чисел из $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \pi_i$, отличное от множества π_j. Так как

$$G_{h(\pi_j)}\,G_{h(\pi_i)}/G_{h(\pi_j)} \cong G_{h(\pi_j)} / G_{h(\pi_i)} \cap G_{h(\pi_j)}, \text{ то}$$

$$G_{h(\pi_j)}\,G_{h(\pi_i)}/G_{h(\pi_j)} \cong G_{h(\pi_i)}/\left(G_{h(\pi_i)}\right)_{h(\pi_j)}.$$

Но по лемме 1.2 $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}$. Следовательно, $G_{h(\pi_i)} \in h(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j}$ и поэтому $G_{h(\pi_i)} / \left(G_{h(\pi_i)}\right)_{h(\pi_j)\mathfrak{S}_{\pi'_j}}$. Значит, для любых различных i и j из множества I группа

$$G_{h(\pi_i)}\, G_{h(\pi_j)} / G_{h(\pi_j)} \in \mathfrak{S}_{\pi'_j}.$$

Следовательно, $G_h / G_{h(\pi_j)} \in \mathfrak{S}_{\pi'_j}$. Но тогда, ввиду изоморфизмов,

$$V_{h(\pi_j)} G_h / V_{h(\pi_j)} \cong G_h / G_h \cap V_{h(\pi_j)} \cong G_h / G_{h(\pi_j)} / G_h \cap V_{h(\pi_j)} / G_{h(\pi_j)}$$

следует, что группа $V_{h(\pi_j)} G_h / V_{h(\pi_j)}$ является π'_j-группой.

Так как по условию $V / G_h \in \bigcap_{j\in I} \mathfrak{S}_{\pi'_j} \mathfrak{S}_{\pi_j}$, то, используя изоморфизм

$$V / V_{h(\pi_j)} G_h \cong V / G_h / V_{h(\pi_j)} G_h / G_h$$

получаем, что $V / V_{h(\pi_j)} G_h \in \mathfrak{S}_{\pi'_j} \mathfrak{S}_{\pi_j}$. Но тогда

$$V / V_{h(\pi_j)} / V_{h(\pi_j)} G_h / V_{h(\pi_j)} \in \mathfrak{S}_{\pi'_j} \mathfrak{S}_{\pi_j}.$$

Следовательно,

$$V / V_{h(\pi_j)} \in \mathfrak{S}_{\pi'_j} (\mathfrak{S}_{\pi'_j} \mathfrak{S}_{\pi_j}) = \mathfrak{S}_{\pi'_j} \mathfrak{S}_{\pi_j}$$

для всех $j \in I$. Значит,

$$V \in \bigcap_{j\in I} h(\pi_j)\ \mathfrak{S}_{\pi'_j} \mathfrak{S}_{\pi_j} = \mathfrak{H}$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если* $\mathcal{D} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi'_i} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, *то для любой группы* G, *справедливо равенство* $G_{\mathfrak{H}} / G_h = (G / G_h)_{\mathcal{D}}$

Доказательство. Пусть $(G / G_h)_{\mathcal{D}} = L / G_h$. Докажем, что $L = G_{\mathfrak{H}}$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$ и $\left(G_{\mathfrak{H}}\right)_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ то $G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\pi_i)} \in \mathfrak{S}_{\pi'_i} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для всех $i \in I$. Следовательно, $G_{\mathfrak{H}} / G_h \in D$. Но тогда $G_{\mathfrak{H}} / G_h \subseteq L / G_h$ и $G_{\mathfrak{H}} \subseteq L$.

С другой стороны, из того, что $L / G_h \in D$ по лемме 1.3. следует, что $L \in \mathfrak{H}$ и $L \subseteq G_{\mathfrak{H}}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Тогда и только тогда подгруппа* V *группы* G, *содержащая* $G_{\mathfrak{H}}$ *является* $\mathfrak{H}$*-подгруппой, когда* $V / G_h \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi'_i} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi'_i} \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Тогда, если $V/G_h \in \mathcal{D}$, то $V \in \mathfrak{H}$ по лемме 1.3.

Докажем обратное. Пусть $V \in \mathfrak{H}$ и $V \supseteq G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно,

$$V_{h(\pi_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = \left(G_{\mathfrak{H}}\right)_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$$

для каждого $i \in I$, так как H-функция является приведенной. Отсюда, ввиду того, что $[V_{h(\pi_i)}, G_{\mathfrak{H}}] \subseteq G_{h(\pi_i)}$ следует, что $V_{h(\pi_i)} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\pi_i)})$. Следуя Хартли (см. лемму 10 [1]) покажем, что в данном случае

$$C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\pi_i)}) \subseteq G_{\mathfrak{H}}.$$

Предположим от противного, что $C = C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\pi_i)})$ не является подгруппой $G_{\mathfrak{H}}$. Тогда в группе G найдется такая нормальная подгруппа $K \subseteq C$, что главный фактор $K/K \cap G_{\mathfrak{H}}$ является нетривиальным. Действительно, согласно предположению $C \cap G_{\mathfrak{H}} \neq K$ для некоторой нормальной подгруппы K. Но, очевидно, $C \cap G_{\mathfrak{H}} = K \cap G_{\mathfrak{H}}$ и поэтому

$$K / C \cap G_H = K/K \cap G_H \cong KG_H / G_H.$$

Итак, $K/K \cap G_{\mathfrak{H}}$ нетривиальная элементарная абелева p-группа. Но тогда из того, что $(K/K \cap G_{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{A}} = 1$ по лемме 1.2 из монографии Л.А. Шеметкова [3] следует, что $K^{\mathfrak{A}}(K \cap G_{\mathfrak{H}}) / K \cap G_{\mathfrak{H}}$ – единичная группа. Следовательно, $K^{\mathfrak{A}} \subseteq K \cap G_{\mathfrak{H}}$.Так как $K \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\pi_i)})$, то

$$K \subseteq C_G(K \cap G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\pi_i)}).$$

Но тогда $[K^{\mathfrak{A}}, K] \subseteq [K \cap G_{\mathfrak{H}}, K] \subseteq G_{h(\pi_i)}$. И поэтому $K / G_{h(\pi_i)}$ – нильпотентная группа класса нильпотентности не более 2. Пусть $P / G_{h(\pi_i)}$ неединичная нормальная силовская p-подгруппа группы $K / G_{h(\pi_i)}$.Так как силовская p-подгруппа покрывает главный p-фактор $K / K \cap G_{\mathfrak{H}}$, то $P(K \cap G_{\mathfrak{H}}) \supseteq K$. Следовательно, $PG_{\mathfrak{H}} = KG_{\mathfrak{H}}$. Поэтому для доказательства леммы, достаточно показать, что $P \in \mathfrak{H}$. Имеются следующие две возможности.

1. p – простое из множества π_i, $i \in I$.

В данном случае $P \in h(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi_i}$. Но, ввиду леммы 1.2 h – такая H-функция класса $\mathfrak{H}$, что для j из I отличных от i имеет место включение $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j) \mathfrak{S}_{\pi_j'}$. Следовательно,

$$h(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq (h(\pi_j) \mathfrak{S}_{\pi_j'})\mathfrak{S}_{\pi_i} .$$

Кроме того, $\mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_j'}$ Значит, $P \in h(\pi_j) \mathfrak{S}_{\pi_j'} \mathfrak{S}_{\pi_j}$ для всех $j \neq i$.

2. p – простое число из множества π_i'.

Тогда $P \in h(\pi_i) \mathfrak{S}_{\pi_i'}$ и, следовательно, $P \in h(\pi_i) \mathfrak{S}_{\pi_i'} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

является π_i'-замкнутой группой для всех $i \in I$.Следовательно, $V / G_h \in D$. Таким образом, из 1) и 2) следует, что $P \in \bigcap_{i \in I} h(\pi_i) \mathfrak{S}_{\pi_i'} \mathfrak{S}_{\pi_i} = \mathfrak{H}$, и мы показали, что для всех $i \in I$ справедливо включение $C \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $V_{h(\pi_i)} \subseteq G_{\mathfrak{H}}$ и $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ для всех $i \in I$. Но тогда из того, что $V \in \mathfrak{H}$ следует, что $V / V_{h(\pi_i)} = V / G_{h(\pi_i)}$

Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Следующие свойства $\mathfrak{F}$-инъекторов групп, вытекающие непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-инъектора, сформулируем в виде леммы.

Лемма 1.6. *Для любой группы* G *справедливы следующие утверждения:*

1) *если* V $\mathfrak{F}$*-инъектор* G *и* $K \lhd G$, *то* $V \cap K$ $\mathfrak{F}$*-инъектор группы* K;

2) *если* V $\mathfrak{F}$*-инъектор* G *и* α: $G \to G\alpha$ *изоморфизм, то* V^α $\mathfrak{F}$*-инъектор группы* G^α;

3) *если* V $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа* G *и* $V \cap M$ $\mathfrak{F}$*-инъектор* M *для любой максимальной нормальной подгруппы* M *группы* G, *то* V $\mathfrak{F}$*-инъектор* G.

Следующая теорема дает решение задачи Хартли описания инъекторов групп.

Теорема 1.7. *Для любой группы* G *и ее подгруппа* V *справедливы следующие утверждения:*

1) V *является* $\mathfrak{H}$*-инъектором* G *тогда и только тогда, когда* V/G_h *является* $\mathfrak{D}$*-инъектором группы* G / G_h, *где* $\mathfrak{D} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i'}\mathfrak{S}_{\pi_i}$;

2) $\mathfrak{H}$*-инъекторы группы – это в точности все те подгруппы из* G, *которые содержат ее* $\mathfrak{H}$*-радикал и* $\mathfrak{H}$*-максимальны в* G.

Доказательство. 1) Пусть V $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Тогда, очевидно, $V \supseteq G_\mathfrak{H}$ и V $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G. Следовательно, по лемме 1.5 $V / G_h \in \mathfrak{D}$ Учитывая $\mathfrak{H}$-максимальность V в G и лемму 1.5, получаем, что V / G_h является $\mathfrak{D}$-максимальной подгруппой группы G / G_h. Так как по лемме 1.4 $G_\mathfrak{H} / G_h = (G / G_\mathfrak{H})_\mathfrak{D}$ и $V \supseteq G_\mathfrak{H}$, то V / G_h $\mathfrak{D}$-максимальная в G / G_h подгруппа, содержащая ее $\mathfrak{D}$-радикал. Следовательно, по теореме Дарси (см. теорему 16 [4], а также монографию [5], с.629) V / G_h $\mathfrak{D}$-инъектор группы G / G_h.

Обратное утверждение докажем индукцией по порядку группы G. Пусть G – контрпример минимального порядка. По теореме Гашюца-Фишера-Хартли [6] в группе G / G_h существует $\mathfrak{D}$-инъектор V/G_h. Пусть M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G.

Покажем вначале, что подгруппа $M_h = \prod_{i\in I} M_{h(\pi_i)}$ группы M совпадает с пересечением $G_h \cap M$. Для этого установим, что $G_h/G_{h(\pi_i)}$ является π_j'-группой для всех $j \in I$.Так как по лемме 1.2 $h_{(\pi_i)} \subseteq h_{(\pi_i)}\mathfrak{S}_{\pi_j'}$ для всех различных i и j из множества I то, ввиду изоморфизма

$$G_{h(\pi_j)} G_{h(\pi_i)} / G_{h(\pi_j)} \cong G_{h(\pi_i)} / G_{h(\pi_i)} \cap G_{h(\pi_j)} = G_{h(\pi_i)} / \left(G_{h(\pi_i)}\right)_{h(\pi_j)},$$

следует, что $G_{h(\pi_j)} G_{h(\pi_i)} / G_{h(\pi_j)}$ является π_j'-группой. Но тогда, ввиду произвольности выбора множеств π_i и π_j, заключаем, что и $G_h / G_{h(\pi_j)}$ также является π_j'-группой.

Так как

$$(G_h \cap M)\, G_{h(\pi_j)} / G_{h(\pi_j)} \cong G_h \cap M / G_h \cap M \cap G_{h(\pi_j)} = G_h \cap M / M_{h(\pi_j)},$$

то $G_h \cap M / M_{h(\pi_j)}$ является π_j'-подгруппой для всех $i \in I$. Отсюда следует, что $G_h \cap M / M_h \in \bigcap_{j\in I}\mathfrak{S}_{\pi_j'}$. Но, очевидно,

$$\bigcap_{j\in I}\mathfrak{S}_{\pi_j'} = \mathfrak{S}_{\bigcap_{j\in I}\pi_j'} = \mathfrak{S}_{(\bigcap_{i\in I}\pi_j)'} = (1).$$

Следовательно, $G_h \cap M = M_h$. Рассмотрим теперь два возможных случая.

1. Группа G_h является подгруппой M. Так как V/G_h D-инъектор группы G / G_h, то по утверждению 1 леммы 1.6 подгруппа $V \cap M / G_h$ является $\mathcal{D}$-инъектором группы M / G_h. Но в данном случае $M_h = G_h$ и поэтому $V \cap M / G_h$ $\mathcal{D}$-инъектор группы M / M_h. Следовательно, по индукции подгруппа $V \cap M$ $\mathfrak{H}$-инъектор группы M. Так как $V / G_h \in \mathcal{D}$, то по лемме 1.3 $V \in \mathfrak{H}$. Докажем, что V $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G. Предположим, что $V \subset V_1$, где V_1 $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G. Тогда $V \cap M = V_1 \cap M$, так как в противном случае, мы получили бы противоречие с тем, что $V \cap M$ $\mathfrak{H}$-максимальна в M. Итак, в данном случае V_1 $\mathfrak{H}$-максимальна в G и $V_1 \cap M$ $\mathfrak{H}$-инъектор группы для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G. Следовательно, по утверждению 3 леммы 1.6 подгруппа V_1 $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Но тогда $V_1 \supseteq G_{\mathfrak{H}}$ и по лемме 1.5 $V_1 / G_h \in \mathcal{D}$ и $V / G_h \subset V_1 / G_h$. Последнее противоречит тому, что V / G_h $\mathcal{D}$-максимальна в G / G_h. Следовательно, $V = V_1$ и V $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Полученное противоречие исключает случай 1.

2. Группа G_h не содержится в M. В этом случае, ввиду максимальности M, следует, что $G = G_h M$. Так как

$$G / G_h \cong M / G_h \cap M = M / M_h,$$

то по утверждению 2 леммы 1.6, получаем, что подгруппа $V \cap M / M_h$ является $\mathcal{D}$-инъектором группы M / M_h. Следовательно, по индукции $V \cap M$ $\mathfrak{H}$-инъектор группы M. По лемме 1.3 $V \in \mathfrak{H}$ и если $V \subset F_1$, где F_1 – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G, то аналогично как и в случае 1 $V \cap M = F_1 \cap M$. Так как $V \supseteq G_h$, то $VM = G$. Следовательно,

$$F_1 = F_1 \cap VM = V(F_1 \cap M) = V(V \cap M) = V$$

и V является $\mathfrak{H}$-максимальной подгруппой группы G. Значит, ввиду произвольности выбора максимальной нормальной подгруппы M группы G, по утверждению 3 леммы 1.6 следует, что V $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Полученное противоречие завершает доказательство первого утверждения теоремы.

2) Если подгруппа V является $\mathfrak{H}$-инъектором группы G, то по определению $\mathfrak{H}$-инъектора, очевидно, $V \supseteq G_h$ и V $\mathfrak{H}$-максимальная в G.

Докажем обратное утверждение. Пусть V – любая $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая ее $\mathfrak{H}$-радикал $G_{\mathfrak{H}}$. Покажем, что V – $\mathfrak{H}$-инъектор G. Так как $V \supseteq G_{\mathfrak{H}}$ и $V \in \mathfrak{H}$ и h – приведенная функция Хартли, то $V \supseteq G_h$. Следовательно, по лемме 1.5 $V / G_h \in \mathcal{D} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i'}\mathfrak{S}_{\pi_i}$. Легко видеть, что ввиду $\mathfrak{H}$-максимальности V в G, следует, что V / G_h является $\mathcal{D}$-максимальной группой в G / G_h. Более того, из условия $V \supseteq G_{\mathfrak{H}}$ по лемме 1.4 вытекает, что $V / G_h \supseteq (G/G_h)_{\mathcal{D}}$. Следовательно, по теореме 16 [5] V / G_h является $\mathfrak{D}$-инъектором группы G / G_h. Но тогда из утверждения 1 вытекает, что подгруппа V является $\mathfrak{H}$-инъектором группы G. Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

С учетом известной теоремы Гашюца-Фишера-Хартли [6] о сопряженности и существовании инъекторов групп, самостоятельный интерес представляет результат, описывающий инъекторы групп посредством нильпотентных инъекторов их некоторых факторгрупп, который вытекает из доказанной теоремы.

Следствие 1.8. Для любого класса Хартли $\mathfrak{H} = \bigcap_p h(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и любой группы G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{H}$-инъекторов, которые характеризуются следующим образом: подгруппа V группы G является ее $\mathfrak{H}$-инъектором тогда и только тогда, когда V / G_h нильпотентный инъектор группы G / G_h. Кроме того, $\mathfrak{H}$-инъекторы группы G это в точности $\mathfrak{H}$-максимальные подгруппы G, содержащие ее $\mathfrak{H}$-радикал.

Характеризация инъекторов групп посредством нильпотентных инъекторов, полученная Хартли [1], вытекает из следствия 1.8 в случае, когда H-функция определяющая локально $\mathfrak{H}$ является постоянной, т.е. $h(p) = \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга) для всех простых p.

Следствие 1.9. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Тогда π-нильпотентные инъекторы группы G, это, в точности, все те максимальные π-нильпотентные подгруппы G, которые содержат π-нильпотентный радикал этой группы.

Доказательство. Класс Фиттинга π-нильпотентных групп совпадает с локальным произведением $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}$. Легко видеть, что $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}$ – класс Фиттинга $\mathfrak{H}$, определяемый локально H-функцией h такой, что для каждого простого p имеет место

$$h(p) = \begin{cases} (1), & \text{если} \quad p \in \pi \\ \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}, & \text{если} \quad p \in \pi' \end{cases}$$

Теперь утверждение вытекает из следствия 1.8.

Отметим, что из следствия 1.9 в случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ следует известная характеризация нильпотентных инъекторов, полученная Фишером [2].

Замечание 1.10. Группу G называют $\mathfrak{F}$-скованной [7] ($\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга), если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. В частности, группа G является $\mathfrak{N}$-скованной ($\mathfrak{N}^{\pi}$-скованной), если $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ (соответственно $C_G(F_{\pi}(G)) \subseteq F_{\pi}(G)$). Хорошо известно (см., например, монографию Л.А. Шеметкова [3, с. 34]), что каждая разрешимая (π-разрешимая) группа является $\mathfrak{N}$-скованной (соответственно, $\mathfrak{N}^{\pi}$-скованной (здесь через $\mathfrak{N}^{\pi}$ обозначен класс всех π-нильпотентных групп)). Однако обратное в общем случае неверно (см. примеры в работах Переса-Моназора, М. Ирансо, Торенстейна, Вальтера [7-9]). Манном [10] было доказано, что каждая $\mathfrak{N}$-скованная группа (в общем случае не обязательно разрешимая) имеет единственный класс сопряженных нильпотентных инъекторов. Используя этот результат и тот факт, что класс всех $\mathfrak{N}$-скованных групп является классом Фиттинга [7], а также теорему 4.12 главы IX книги [3], легко убедиться, следуя доказательству теоремы 1,7, что результат 1.8 верен в классе групп, состоящем не обязательно из разрешимых групп.

А именно: для любого локального класса Фиттинга $\mathfrak{H} = \bigcap_p h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и любой группы G такой, что G / G_h является $\mathfrak{N}$-скованной группой, справедливы следующие утверждения:

1) в группе G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G;

2) подгруппа V является $\mathfrak{H}$-инъектором G в том и только в том случае, когда V / G_h нильпотентный инъектор группы G / G_h;

3) $\mathfrak{H}$-инъекторы группы G это в точности те $\mathfrak{H}$-максимальные в G подгруппы, которые содержат ее $\mathfrak{H}$-радикал.

Кроме того, учитывая теорему М. Ирансо и М. Тореса [11], указанные результаты справедливы для любого класса Хартли $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и любой группы G такой, что факторгруппа G / G_h p-скована [12]. Отсюда, в частности, следует, что любая p-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных p-нильпотентных инъекторов, причем такими инъекторами являются, в точности, все максимальные p-нильпотентные подгруппы из G, содержащие $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал группы G.

Легко видеть, что каждый класс Хартли [1] является локальным классом Фиттинга. В связи с этим возникает задача нахождения характеризаций инъекторов групп для локальных классов Фиттинга в общем случае, аналогичных полученным в теореме 1.7 и следствии 1.8. Однако, в общем случае, это осуществить невозможно, что подтверждает следующий пример.

Пример 1.11. Пусть $\pi = \{2,5\}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ – класс всех π-специальных групп. Класс $\mathfrak{F}$ является локальным классом Фиттинга. Пусть S_3 – симметрическая группа из трех символов. По теореме B.10.7 [7] группа S_3 имеет точный неприводимый модуль M над полем GF(5). Пусть $G = M \rtimes S_3$. Применяя снова теорему B.10.7 [7], заключаем, что группа G имеет точный неприводимый модуль N над полем GF(2). Пусть $\Gamma = N \rtimes G$. Как установлено в IX. 4.4 [7] $\mathfrak{F}$-радикал $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ группы Γ совпадает с ее подгруппой Фиттинга и множество $\mathfrak{F}$-инъекторов группы Γ совпадает с множеством $\mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$-инъекторов группы Γ. Так как $F(\Gamma) = N$ является 2-группой, и $\mathfrak{N}$-инъекторы Γ (см. следствие 1.9) это в точности, максимальные нильпотентные подгруппы, содержащие F(Γ), то $\mathfrak{N}$-инъекторы Γ являются силовскими 2-подгруппами группы Γ. Теперь, применяя свойство Локетта [13], описывающее инъекторы для произведений классов Фиттинга (см. также теорему IX. 1.22 [7]), получаем, что каждый $\mathfrak{F}$-инъектор группы Γ имеет вид $F(\Gamma)\,P_1$, где P_1 – силовская 3-подгруппа группы Γ. Итак, мы получили, что силовская 2-подгруппа P группы Γ является подгруппой из класса $\mathfrak{F}$, содержащей $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ и не содержится в любом $\mathfrak{F}$-инъекторе группы Γ.Отсюда следует, что $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы Γ, содержащие $\mathfrak{F}$-радикал группы Γ не являются $\mathfrak{F}$-инъекторами Γ.

Замечание 1.12. Y-функцию f, определяющую локально класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем постоянной, если $f(p) = f(q)$ для всех простых $p, q \in Supp(f)$. Из примера 1.11 следует, что характеризаций $\mathfrak{F}$-инъекторов групп посредством $\mathfrak{F}$-радикалов аналогичных характеризациям полученным в 1.7 и 1.8, для классов Фиттинга, определяемых локально H-функциями, которые не являются постоянными, в общем случае, получить невозможно (заметим, что класс $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ определяется локально H-функцией, которая непостоянна). Этот факт мы будем учитывать при характеризации $\mathfrak{F}$-инъекторов для локальных классов Фитинга в следующем параграфе.

§ 2. Описание инъекторов при помощи подгрупп Холла

Пусть $\mathfrak{F}$ = SLR(f) класс Фиттинга, определяемый полулокально полной Н-функцией f, то есть $\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{S}_{p'\pi'}$. Легко видеть, что класс Фитинга $\mathfrak{F}$ локален. Поэтому следующая лемма является простой модификацией леммы 2 из [14].

Лемма 2.1. *Если* $\mathfrak{F}$ = SLR(φ) *для некоторой полной* Н-*функции* φ, *то существует такая полная приведенная* Н-*функция* f, *что* $\mathfrak{F}$ = SLR(f).

Пусть $\mathfrak{F}$ = SLR(f) для некоторой полной приведенной Н-функции f, π =Supp(f) $\neq \varnothing$ и $G_f = \prod_{p\in\pi} G_{f(p)}$.

Лемма 2.3. *Если* $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-*радикал группы* G *и* V *такая подгруппа группы* G, *что* $V / G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'}$, *то* $V \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $(G_f)_{f(p)}$ – f(p)-радикал G_f ($p \in \pi$). Так как $G_f \trianglelefteq G$, то $(G_f)_{f(p)} = G_f \cap G_{f(p)} = G_{f(p)}$.
Но $G_f \trianglelefteq V$ и поэтому $(G_f)_{f(p)} = G_f \cap V_{f(p)}$. Следовательно, $G_{f(p)} \subseteq V_{f(p)}$ для всех простых $p \in \pi$.
Так как $G_f \in \mathfrak{F}$, то $G_f / (G_f)_{f(p)} = G_f / G_{f(p)} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Следовательно, ввиду изоморфизма

$$V_{f(p)} G_f / V_{f(p)} \cong G_f / G_{\mathfrak{F}} \cap V_{f(p)} \cong G_f / G_{f(p)} / G_f \cap V_{f(p)} / G_{f(p)}.$$

Вытекает, что $V_{f(p)} G_f / V_{f(p)}$ является p'-группой. Так как $V / G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'} = \bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{S}_{p'}$, то, используя изоморфизм $V / V_{f(p)} G_f \cong V / G_f / V_{f(p)} G_f / G_f$ получаем, что $V/V_{f(p)}G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Но тогда и группа $V/V_{f(p)}/V_{f(p)}G_f / V_{f(p)} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Следовательно, $V/ V_{f(p)} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$ для всех простых $p \in \pi$. Значит,

$$V \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если* $\mathfrak{F}$ = SLR(f) *для некоторой полной* Н-*функции* f *и* π = Supp(f) $\neq \varnothing$, *то для любого класса Фиттинга* $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{p\in Supp(f)} f(p)$ *имеет место включение* $C_G (G_{\mathfrak{F}} /G_{\mathfrak{X}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Предположим от противного, что $C=C_G (G_{\mathfrak{F}} /G_{\mathfrak{X}})$ не является подгруппой $G_{\mathfrak{F}}$. Тогда аналогично как и при доказательстве леммы 1.5 (см. также лемму Хартли [1, с. 204]) заключаем, что существует нетривиальный главный р-фактор $K/ K \cap G_{\mathfrak{F}} \cong CG_{\mathfrak{F}} / G_{\mathfrak{F}}$ и $K / G_{\mathfrak{X}}$ нильпотентная группа класса нильпотентности не более 2. Пусть $P/ G_{\mathfrak{X}}$ неединичная нормальная силовская р-подгруппа группы $K / G_{\mathfrak{X}}$. Тогда, очевидно, $P \triangleleft G$ и $PG_{\mathfrak{F}} = KG_{\mathfrak{F}}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно выяснить, что $P \in \mathfrak{F}$.

Пусть q – любое простое число из множества π = Supp(f). Тогда имеется две следующие возможности.

1. $q \neq p$.

В этом случае $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_{q'}$. Следовательно, $P / G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}_{q'}$ и поэтому, ввиду изоморфизма

$$P / G_{\mathfrak{X}} \cong P / (G_{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{S}_{q'}} / G_{\mathfrak{X}} / (G_{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{S}_{q'}}$$

следует, что $P / (G_{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{S}_{q'}}$ является q'-группой. Значит, $P^{\mathfrak{S}_{q'}} \subseteq (G_{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{S}_{q'}}$. С другой стороны,

$$G_{\mathfrak{X}} / P^{\mathfrak{S}_{q'}} \cap G_{\mathfrak{X}} \cong G_{\mathfrak{X}} P^{\mathfrak{S}_{q'}} / P^{\mathfrak{S}_{q'}} \in \mathfrak{S}_{q'}$$

и поэтому

$$(G_{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{S}_{q'}} \subseteq P^{\mathfrak{S}_{q'}} \cap G_{\mathfrak{X}} \subseteq P^{\mathfrak{S}_{q'}}.$$

Итак, $G_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{S}_{q'}} = P^{\mathfrak{S}_{q'}}$ для всех простых q из π, отличных от p. Значит,

$$P \in f(q)\, \mathfrak{S}_{q'} = f(q)\mathfrak{N}_q\, \mathfrak{S}_{q'}$$

для всех $q \neq p$ из π.

2. Предположим, что q = p. Тогда, рассуждая аналогично как и в случае 1 получаем равенство $P^{\mathfrak{N}_p} = (G_{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}_p}$ и $P^{\mathfrak{N}_p} \in f(p)$. Следовательно, $P \in f(p)\mathfrak{N}_p$ и $P \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Таким образом, из случаев 1 и 2, имеем, что

$$P \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\, \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2.5. Отметим некоторые известные свойства классических радикалов групп, вытекающие из леммы 2.4, а также возможности ее распространения на классы неразрешимых групп (в частности, π-разрешимых групп).

Пусть $\pi = \mathbb{P}$ и f – такая H-функция, что $f(p) = \mathfrak{N}_p$ для всех простых p. Тогда f – полная H-функция класса $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ и $G_{\mathfrak{F}} = F(G)$ – радикал Фиттинга. В этом случае $\mathfrak{X} = (1)$ и из леммы 2.4 следует известное свойство $C_G(F(G) \subseteq F(G)$, которое называют $\mathfrak{N}$-скованностью разрешимых групп.

Более того, легко убедиться, следуя доказательству леммы 2.4, что включение $C_G (G_{\mathfrak{F}} / G_{\mathfrak{X}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ справедливо для любой группы G такой, что $G / G_{\mathfrak{F}}$ π-разрешима (в частности, когда G π-разрешима) в каждом из следующих случаев для классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс, определяемый полулокально H-функцией f и класс Фиттинга $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{p\in\pi} f(p)$ ($\pi = \mathrm{Supp}(f) \neq \varnothing$);

2) локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{E}_p\mathfrak{N}p$ для некоторой H-функции f и класс Фиттинга $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{E}_{p'}$.

Нетрудно заметить, что из указанного выше утверждения вытекают известные свойства радикалов $\mathfrak{N}^{\pi}$-скованности и $\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$-скованности π-разрешимых групп.

Заметим, что общие закономерности построения радикалов групп и их свойства для локальных формаций Фитинга изучены Л.А. Шеметковым [15, 16].

Лемма 2.6. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathrm{SLR}(f)$ *для некоторой полной постоянной* H*-функции* f *и* $\pi = \mathrm{Supp}(f) \neq \varnothing$. *Если* V *– некоторая* $\mathfrak{F}$*-подгруппа группы* G *и* $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$, *то* $V / G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Доказательство. Так как $G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq V$, то $G_{f(p)} = (G_{\mathfrak{F}})_{f(p)} = G_{\mathfrak{F}} \cap V_{f(p)}$. Но тогда $[V_{f(p)}, G_{\mathfrak{F}}] \subseteq G_{f(p)}$ и поэтому $V_{f(p)} \subseteq C_G (G_{\mathfrak{F}} / G_{f(p)})$. Так как функция f постоянна, то по лемме 2.4 $C_G (G_{\mathfrak{F}} / G_{f(p)}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ для всех простых $p \in \pi$. Так как $V \in \mathfrak{F}$, то $V / V_{f(p)}$ является p'-группой для каждого простого $p \in \pi$. Но тогда

$$V / V_f = V / G_f \in \bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{S}_{\pi'}$$

Лемма доказана.

Из леммы 2.3 и 2.6 вытекает

Следствие 2.7. Пусть $\mathfrak{F} = SLR(f)$ для некоторой полной постоянной H-функции f, $\pi = Supp(f) \neq \varnothing$ и V – подгруппа группы G, содержащая ее $\mathfrak{F}$-радикал. Тогда и только тогда $V \in \mathfrak{F}$, когда $V / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Описание $\mathfrak{F}$-инъскторов групп при помощи холловских π-подгрупп и f-радикалов дает следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть* $\mathfrak{F} = SLR(f)$ *для некоторой полной постоянной* H-*функции* f *и* $\pi = Supp(f) \neq \varnothing$. *Тогда и только тогда подгруппа* V *является* $\mathfrak{F}$-*инъектором группы* G, *когда* V / G_f – π'-*холловская подгруппа группы* G / G_f.

Доказательство. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Тогда V является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G и $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, по лемме 2.6 $V / G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Если теперь $V / G_f \subset F / G_f$, где F / G_f некоторая π'-хол-ловская подгруппа группы G / G_f, то $V \subset F$ и $F \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.3. Но это противоречит $\mathfrak{F}$-максимальности V в G. Следовательно, $V = F$ и V / G_f – π'-холловская подгруппа G / G_f.

Докажем обратное утверждение. Пусть G – контрпример минимального порядка и M – произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G . Пусть V / G_f – π'-холловская подгруппа группы G / G_f. Так как H-функция f постоянна, то $G_{f(p)} = G_f$ для всех простых $p \in \pi$. Тогда из того, что $M \lhd G$ следует, что $M_f = G_f \cap M$. Если G_f не содержится в M, то $G = G_f M$ и поэтому $G / G_f \cong M / M_f$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.6 подгруппа $V \cap M / M_f$ является π'-холловской из M / M_f и поэтому по индукции $V \cap M$ $\mathfrak{F}$-инъектор группы M. Так как $V / G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'}$, то по лемме 2.3 $V \in \mathfrak{F}$. Пусть $V \subset F$, где F $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Так как $F \supseteq G_f$, то по лемме 2.6 $F / G_f \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Но тогда из того, что V / G_f π'-холловская подгруппа G / G_f следует $V / G_f = F / G_f$. Итак, V – $\mathfrak{F}$-максимальна в G и $V \cap M$ $\mathfrak{F}$-инъектор в M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G. Следовательно, V $\mathfrak{F}$-инъектор группы G по утверждению 3 леммы 1.6. Получили противоречие.

Предположим теперь, что G_f является подгруппой M. Тогда, $M_f=G_f$ и по утверждению 1 леммы 1.6 $V \cap M / M_f$ π'-холловская подгруппа группы M/M_f. Следовательно, по индукции $V \cap M$ $\mathfrak{F}$-инъектор группы M. Рассуждая аналогично, как и выше, заключаем снова, что V $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Следствие 2.9. Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F} = SLR(f)$ с полной постоянной H-функцией f, $\pi = Supp(f) \neq \varnothing$ и любой группы G ее $\mathfrak{F}$-инъекторами являются, в точности, подгруппы вида $G_{\pi'} G_f$, где $G_{\pi'}$ – некоторая π'-холловская подгруппа группы G.

Доказательство. Пусть V / G_f – π'-холловская подгруппа группы G / G_f. Но тогда по теореме Холла-Чунихина (см. также IV. 1.6-1.7 монографии [5]) $V / G_f = G_{\pi'} G_f / G_f$ для некоторой π'-холловскои подгруппы $G_{\pi'}$ группы G.Теперь следствие вытекает непосредственно из теоремы 3.2.8.

Следствие 2.10. Для класса Фитинга $\mathfrak{F}$ = SLR(f) с полной постоянной H-функцией f, π = Supp(f) $\neq \varnothing$ и любой группы G ее $\mathfrak{F}$-инъектор характеризуется следующим образом: подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором G в том и только в том случае, когда V $\mathfrak{F}$-максимальна в G и $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$ и V $\mathfrak{F}$-максимальна в G. Тогда по лемме 2.6 $V / G_{\mathfrak{F}}$ является π'-подгруппой. Если $V / G_{\mathfrak{F}} \subset F / G_{\mathfrak{F}}$, где $F / G_{\mathfrak{F}}$ π'-холловская подгруппа группы $G / G_{\mathfrak{F}}$, то по лемме 2.3 $F \in \mathfrak{F}$ и поэтому, ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности V в G, подгруппа $V / G_{\mathfrak{F}}$ является π'-холловской в $G / G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, по теореме 2.8 V $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Обратное утверждение вытекает непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-инъектора.

Следствие 2.11. Подгруппа V группы G является π-замкнутым инъектором G тогда и только тогда, когда V максимальная из π-замкнутых подгрупп G и содержит π-замкнутый радикал.

Доказательство. Легко видеть, что класс $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ π-замкнутых групп совпадает с SLR(f) для полной постоянной H-функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_\pi$ для всех простых $p \in \pi$. Теперь утверждение вытекает из следствия 2.10.

Следствие 2.12. Пусть $\mathcal{P}_k$ – класс всех групп π-длины $\leq k$ ($k \geq 0$). Тогда в любой группе G ее $\mathcal{P}_k$-инъекторами являются в точности $\mathcal{P}_k$-максимальные в G подгруппы, содержащие P_k-радикал группы G.

Доказательство. Если k = 0, то $P_0 = \mathfrak{S}_{\pi'}$ и $\mathcal{P}_k$-инъекторы группы G это, в точности, ее π'-холловские подгруппы. Пусть k > 0. Тогда нетрудно заметить, что $\mathcal{P}_k$ = SLR(f) для полной постоянной H-функции f такой, что $f(p) = \mathcal{P}_{k-1}\mathfrak{S}_\pi$ для всех простых $p \in \pi$, где $\mathcal{P}_{k-1}$– класс Фиттинга всех групп π-длины $\leq k - 1$. Теперь, характеризация $\mathcal{P}_k$-инъекторов легко получается из 2.10.

Замечание 2.13. Используя теорему С.А. Чунихина [17,18] о существовании и сопряженности холловских π-подгрупп в любой π-разрешимой группе, требование разрешимости группы G в теореме 2.8 и следствиях из нее можно ослабить до требования π-разрешимости (в частности, разрешимости) ее факторгруппы G / G_f. Тогда, обозначая все непустые значения полной постоянной H-функции f, определяющей полулокально $\mathfrak{F}$ = SLR(f) через $\mathfrak{X}$ мы получаем следующее утверждение.

В любой группе G из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов, которые характеризуются следующим образом: подгруппа V группы G является ее $\mathfrak{F}$-инъектором только тогда, когда $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$ и V $\mathfrak{F}$-максимальна в G.

Действительно, если $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, то любые два $\mathfrak{F}$-инъектора F и V группы G сопряжены в G. Это следует из того, что следуя доказательству теоремы 2.8, мы получим, что F / G_f и V / G_f π'-холловские подгруппы группы G/G_f, которые будут сопряжены в G/G_f по теореме Чунихина [18]. Отсюда F и V сопряжены в G. Заметим, что существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-инъ-екторов в π-разрешимых группах ($\pi = \pi(\mathfrak{F})$ для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ доказаны Л.А. Шеметковым [19].

§ 3. Примеры построения инъекторов

3.1. π-замкнутые инъекторы

Как уже отмечалось ранее класс всех π-замкнутых групп совпадает с произведением классов Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ и определяется полулокально полной постоянной H-функцией f такой, что для всех простых $f(p) = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, в данном случае для любой группы G f-радикал G_f группы G совпадает с ее π-радикалом $O_\pi(G)$ и по следствию 2.9 π-замкнутые инъекторы группы это в точности подгруппы вида $O_\pi(G)\,G_{\pi'}$, где $G_{\pi'}$ – некоторая π'-холловская подгруппа группы G. Учитывая замечание 2.13 такое же описание имеют π-замкнутые инъекторы и в классе $\mathfrak{S}^{\pi'}$ всех π'-разрешимых групп.

3.2. Инъекторы ограниченной π-длины

Пусть $\mathcal{P}_k$ (k $\geq$ 0 – класс всех групп π-длины $\leq$ k. Если k = 0, $\mathcal{P}_0 = G_{\pi'}$ и $\mathcal{P}_k$-инъекторы группы G это в точности ее π'-холловские подгруппы. Пусть k > 0. Тогда класс $\mathcal{P}_k$ определяется полулокально полной постоянной H-функцией f такой, что $f(p) = \mathcal{P}_{k-1}\mathfrak{S}_\pi$ для всех простых $p \in \pi$, где $\mathcal{P}_{k-1}$ – радикальный класс всех групп π-длины $\leq k - 1$. Следовательно, $\mathcal{P}_{k-1}$ $\mathfrak{S}_\pi$-радикал $G_{\mathcal{P}(k-1)\mathfrak{S}_\pi}$ $\mathfrak{S}_\pi = G_f$ и по следствию 2.9 инъекторы π-длины $\leq$ k группы G это в точности подгруппы вида $G_{\mathcal{P}_k}\ G_{\pi'}$, где $G_{\mathcal{P}_k}$ – $\mathcal{P}_k$-радикал группы G и $G_{\pi'}$ – π'-холловская подгруппа из G.

3.3. Инъекторы ограниченной нильпотентной длины

Пусть $\mathfrak{N}^k$ (k > 0) – класс всех групп нильпотентной длины $\leq$ k. Тогда $\mathfrak{N}^k$ класс Хартли, определяемый локально H-функцией h, такой, что $h(p) = \mathfrak{N}^{k-1}$ для всех простых p, где $\mathfrak{N}^{k-1}$ – класс всех групп нильпотентной длины $\leq k - 1$. В данном случае h-радикал $G_h = G_{\mathfrak{N}^{k-1}}$ и поэтому инъекторы нильпотентной длины $\leq$ k группы G это в точности все те подгруппы из G, факторгруппы которых по $G_{\mathfrak{N}^{k-1}}$ -радикалу являются нильпотентными инъекторами группы $G / G_{\mathfrak{N}^{k-1}}$. Более того, ввиду замечания 1.10, для любого непустого класса Фитинга $\mathfrak{F}$ и любой группы G (в общем случае, не обязательно разрешимой) такой, что $G / G_\mathfrak{F}$ $\mathfrak{N}$-скованная группа, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$-инъекторы группы G это, в точности, все те подгруппы из G, факторгруппы которых по $G_\mathfrak{F}$ являются нильпотентными инъекторами группы $G / G_\mathfrak{F}$.

3.4. Инъекторы дли степени класса π-замкнутых групп

Пусть $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'})^k = \underbrace{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \ldots \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}}_{k}$

Легко видеть, что $\mathfrak{F}$, определяется полулокально полной постоянной H-функцией f такой, что для каждого простого $p \in \pi$ имеет место

$$F(p) = (\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'})^{k-1}\mathfrak{S}_\pi$$

Тогда f-радикал G_f-группы G совпадает с подгруппой

$$L = O_{\underbrace{\pi\pi'\pi\pi'\ldots\pi\pi'}_{k-1}\pi}(G)$$

и по следствию 2.9 $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G это в точности подгруппы вида $LG_{\pi'}$, где $G_{\pi'}$ – некоторая π'-холловская подгруппа G.

Литература

1. ***Hartley B.*** On Fischer's dualization of formation theory // Proc.London Math.Soc. 1969. Vol.3, N 2. P.193-207.
2. ***Fischer B.*** Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Habilitationschrift. Universität Frankfurt (M), 1966.
3. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М., 1978. – 272 с.
4. ***D'Arcy P.*** Locally dedined Fitting classes // J.Austral. Math.Soc. 1975. Vol.20, N 1. P. 25-32.
5. ***Doerk K., Hawkes T.O.*** Finite Soluble Groups // De Gruyter Exp. In Math. Vol.4. Berlin-New York, 1992. – 891 p.
6. ***Fischer B., Gaschütz W., Hartley B.*** Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math.Z. 1967. Bd.102, N 5. S.337-339.
7. ***Iranzo M.I., Perez Monazor F.*** F-constraint with to a Fitting class // Arch.Math. 1986. Bd. 46, N 2. S.205-210.
8. ***Gorenstein D., Walter J.*** The П-layer of a finite group // III. J. Math.1971. Vol. 15, N 6. P. 555-564
9. ***Iranzo M.I., Perez Monazor F.*** A class of finite groups having nilpotent injectors // J.Austal.Math.Soc. 1986. Vol. 41, N 4. P. 361-365.
10. ***Mann A.*** Injectors and normal subgroups of finite groups // Isr. J. Math. 1971. Vol. 9, N 5-6. 554-558.
11. ***Iranzo M.I., Torres M.*** The p*, p-injectors of a finite group / Rend. Semc.Math.Univ.Padova. 1989. Vol. 82. P. 233-237.
12. ***Iranzo M.I, Martinez-Pastor A., Perez-Monazor F.*** A ZJ-Thlozem for p*, p-injectors in Finite Groups // Rend. Sem.Mat.Univ. Padova. 1992. Vol. 87, N 1. P. 69-76.
13. ***Lockett P.*** On the theory of Fitting classes // Math.Z. 1973. Bd. 131. N 3. S. 103-115.
14. ***Воробьев Н.Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. 1988. Т. 43, вып.2. С. 161-168.
15. ***Шеметков Л.А.*** О f-радикалах конечных групп // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, N 10. С. 869-872.
16. ***Шеметков Л.А.*** Композиционные формации и радикалы конечных групп // Укр.матем.ж. 1988. Т. 40, N 3. С. 369-374.
17. ***Чунихин С.Д.*** О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. 1950. Т. 73, N 1. С. 29-32.
18. ***Чунихин С.А.*** Подгруппы конечных групп. Мн., 1964.
19. ***Шеметков Л.А.*** О подгруппах π-разрешимых групп // В кн. Конечные группы. – Мн., 1975. С. 207-212.