УДК 378: 519.6

А. И. Бочкин, В. В. Букштынов

Система двусторонних оценок погрешностей при преподавании численных методов

При преподавании курса "Численные методы" рассматриваются вопросы построения, применения и теоретического обоснования алгоритмов приближенного решения различных классов математических задач. Систематизация курса в общепринятом ("классическом") случае проведена по тематике поставленных задач алгебры и анализа, математической физики, например: численное интегрирование и дифференцирование, решение трансцендентных уравнений и др. [1,2].

Рассмотрение каждого такого класса задач курса чаще всего строится по следующему стандартному алгоритму. Каждая тема, условно выделенная в курсе численных методов по характеру решаемой задачи, располагает обычно несколькими методами, позволяющими с той или иной степенью точности решить поставленную задачу. Описание каждого метода содержит, как правило, его теоретическое обоснование, обозначение границ применимости метода и, обязательно, описание приемов оценки погрешностей, возникающих при его применении.

В настоящее время наибольшее распространение получила система оценки погрешностей, основанная на теории рядов и, как следствие, использующая в вычислениях производные первого, второго и более высоких порядков. Следует заметить, что эта система достаточно эффективна при возможности использования производных достаточно большого порядка и за счет уменьшения вычислительной погрешности при использовании ЭВМ. Однако достаточно часто возникают ситуации, когда отсутствуют сведения о поведении функций-производных, или когда исследуемая функция просто задана неаналитическим способом, в виде алгоритма определения значений по "входным данным", или значения функции определяются практическим путем (в ходе вычислительного математического, физического или любого другого эксперимента). В этих случаях такая система оценки погрешностей неприемлема.

С другой стороны, "классическая" система оценки погрешностей обычно задает только величину интервала, внутри которого находится точное значение определяемой величины. Часто в различных целях необходимо все-таки определить численные значения его границ, т.е. организовать двустороннюю оценку погрешностей вычисления. Эта задача усложняется тем, что каждый метод, имеющий такую возможность оценки погрешностей, должен иметь двустороннюю сходимость к искомому значению вычисляемой величины. Не все методы, рассматриваемые в "классическом" случае, могут обнаружить такую двустороннюю сходимость или, по крайней мере, достаточно простую организацию такой сходимости. Некоторые методы по ряду причин этого сделать не позволяют. В этом случае, достаточно распространенном, можно использовать подбор пары однотипных методов, каждый из которых организовывал бы одностороннюю сходимость, тем самым решая эту проблему.

Достаточное количество распространенных численных методов, иногда даже при небольшом их модифицировании и попарной группировке, позволяют объединить их в группу методов, имеющих возможность двусторонней оценки погрешностей (часто даже при отсутствии сведений о производных). Оставив нетронутым общепринятое "классическое" деление курса численных методов на темы и задачи, можно предложить единый подход к новой системе оценки погрешностей.

Ярким доказательством возможности перехода к системе двусторонней оценки погрешностей являются модифицированный метод хорд при решении трансцендентных уравнений и видоизмененные парные методы численного интегрирования. Первый метод имеет возможность осуществления двусторонней сходимости к искомой величине, остальные – получаются путем попарного комбинирования методов, принадлежащих "классической" теории.

При использовании "классического" метода хорд при решении уравнения типа f(x)=0 сначала выделяют исследуемый промежуток (отделяют действительные корни). Затем по соответствию знаков значений функции и ее второй производной на концах промежутка выбирают подвижный и неподвижный концы хорды. Перемещая в точку пересечения хорды с осью абсцисс подвижный ее конец, получают монотонную одностороннюю сходимость к искомому значению корня уравнения.

Суть модифицированного метода хорд состоит в том, что с помощью "классического" метода можно организовать два монотонных сходящихся процесса слева и справа от предполагаемого значения искомого корня. Первый процесс, организованный "классическим методом", будет давать сходимость со стороны подвижного конца хорды. Для организации второго процесса, организующего сходимость с другой стороны, необходимо в формулах "классического" метода заменить значение абсциссы подвижного конца хорды на абсциссу любой точки, выбранной в промежутке между неподвижным концом и предполагаемым значением корня уравнения. Эту точку легко определить из условия соответствия знаков значений функции f(x) в выбранной точке и в точке – неподвижном конце хорды.

Метод можно еще более оптимизировать, если перейти от рассмотрения четырех различных ситуаций (по числу различных комбинаций знаков первой и второй производных) к одной стандартной – первая и вторая производная положительны, т.е. когда функция f(x) возрастает вогнуто. Для этого, с помощью симметричных преобразований, можно организовать алгоритм перехода функции f(x) на исследуемом промежутке отделения корня [a;b] к новой функции F(x), которая на промежутке $[a_1;b_1]$ обладает едиными "стандартными" свойствами: $f'(x)>0$ и $f''(x)>0$. В этом случае "классический" метод хорд организует монотонную сходимость к искомому значению корня уравнения f(x)=0 слева, а модифицированный метод с выбранной новой точкой начального приближения – справа.

Таким образом, модифицированный метод хорд при выполнении тех же требований, накладываемых на функцию f(x) и промежуток изоляции корня, что и в "классическом" методе хорд, обнаруживает в себе организацию двусторонней сходимости. Корень уравнения f(x)=0, определенный таким образом, лежит внутри интервала, границы которого определяются в результате двустороннего итерационного процесса, организуемого рассмотренным выше модифицированным методом. Погрешность определения корня в этом случае равна величине полученного интервала и может быть сколь угодно малой величиной, контролируемой количеством проведенных итераций и вычислительными возможностями при организации итерационного процесса.

При проведении "классического" численного интегрирования, т.е. определении численного значения определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, пользуются несколькими методами: средних прямоугольников, трапеций, парабол (методом Симпсона). Общим в них является разбиение промежутка интегрирования на конечное число (n) отрезков (т.е. введение сеточной функции) и зависимость погрешности вычислений от способа разбиения (т.е. от величины i-того частичного отрезка, где $i = \overline{1,n}$). Различия – в способах интерполирования функции f(x) на частичных отрезках, позволяющих вычислять площади прямоугольников и трапеций, построенных на каждом из них.

"Классическая" погрешность указанных методов представляет собой величину интервала, внутри которого находится истинное значение величины определенного интеграла. Она зависит от величины промежутка интегрирования, параметров задания сеточной функции и определяется поведением второй (для методов средних прямоугольников и трапеций) или четвертой (для метода парабол) производных функции f(x).

Ограничимся рассмотрением двух пар методов, полученных путем комбинирования соответствующих "классических" методов интегрирования и позволяющих организовать систему двусторонних оценок погрешностей при численном интегрировании.

Метод левых и правых прямоугольников основан на следующем принципе. На каждом частичном отрезке строится два прямоугольника: "левый" – по высоте равный значению функции f(x) в точке, являющейся левой границей частичного промежутка, "правый" – с высотой, аналогично определяющейся значением правой границы. Значение определенного интеграла на данном частичном промежутке будет лежать между значениями площадей этих прямоугольников. Сравнив значения площадей на каждом частичном промежутке и затем просуммировав их значения отдельно для больших и меньших прямоугольников, получим границы промежутка, внутри которого находится истинное значение определенного интеграла. Например, при монотонном поведении (возрастании или убывании) функции f(x) на исследуемом промежутке значение определенного интеграла будет лежать между значениями сумм площадей отдельно левых и отдельно правых прямоугольников.

Погрешность данного метода будет равна величине полученного интервала и в частном случае монотонного поведения функции будет зависеть от величины частичного отрезка. Тогда можно еще до начала вычислений подобрать параметры разбиения для достижения требуемой точности. В случае немонотонного поведения функции на промежутке интегрирования организовать суммирование площадей левых и правых прямоугольников несколько сложнее, т.к. необходимо будет сравнивать их значения на каждом частичном отрезке.

Метод центральных прямоугольников и трапеций основан на том факте, что значение определенного интеграла на частичном отрезке будет заключено в промежутке между значениями площадей центрального прямоугольника и трапеции, построенных на этом частичном отрезке. Если функция f(x) ведет себя монотонно в смысле сохранения первой и второй производными знака на всем промежутке интегрирования, то для определения левой и правой границ промежутка, внутри которого находится истинное значение определенного интеграла, достаточно просуммировать площади отдельно центральных прямоугольников и отдельно трапеций. В более сложных случаях, по аналогии с предыдущим методом, рассматривая каждый частичный промежуток, надо сравнивать полученные на нем значения площадей прямоугольников и трапеций.

Погрешность в этом случае будет определяться по аналогии с предыдущим случаем.

Таким образом, рассмотренные выше методы решения трансцендентных уравнений и численного интегрирования позволяют обоснованно говорить о возможности единого подхода к новой системе оценки погрешностей в численных методах. Эта система может быть полезна при решении ряда практических задач и позволяет систематизировать методы при решении ряда задач "классической" теории численных методов по критерию возможности организации двусторонней оценки погрешностей.

С методической точки зрения при изучении курса численных методов студентам было бы полезно ознакомиться с различными подходами к оценке погрешностей методов данного курса, так как каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, область применения и круг решаемых задач. Умение пользоваться двумя системами оценки погрешностей дает возможность подобрать метод в зависимости от требований, поставленных решаемой задачей, и соответствия имеющихся возможностей требованиям конкретных методов.

Методы "классической" системы оценки погрешностей наиболее приемлемы при наличии сведений о поведении производных достаточно высоких порядков. В этом случае возможно получение более точного результата и более высокой скорости сходимости, чем в случае использования системы двусторонней оценки погрешностей. Однако методы последней позволяют обходиться без сведений о производных и решать более широкий круг задач, как то – кроме определения величины промежутка, внутри которого находится истинное значение определяемой величины, вычислять его точные границы.

Таким образом, единый подход к оценке погрешностей при преподавании курса "Численные методы" позволяет объединить различные системы оценок и провести их дополнительную систематизацию (по принадлежности к той или иной системе) с целью более удобного их практического применения и преподавания всего курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Бабенко К.И.*** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. - 743 с.
2. ***Марчук Г.И.*** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. - 535 с.

S U M M A R Y

The possibility of a construction of the new approach to an evaluation of errors is considered with problem solving of the numerical methods, in which basis the principle of a two-sided evaluation of errors is puted. As examples some methods of a numerical integration and solutions of transcendental equations permitting to detect two-sided convergence are taken. The advantages and shortages of the approach in relation to "classical" are marked.