УДК 517.926

Ю.А. Завацкий

Об уточнении постоянной в оценках характеристических показателей линейной системы с экспоненциальными возмущениями

Рассматриваем линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной (постоянной $a > 0$) матрицей $A(\cdot):[0,+\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$, характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$, реализуемыми нормальной по Ляпунову упорядоченной системой решений $X(t) = [X_1(t),\ldots,X_n(t)]$, и коэффициентом неправильности $\sigma_1 = \sigma_1(A)$ Д.М. Гробмана [1].

Пусть $\alpha_k(t)$ — угол между вектором-решением $X_k(t)$ и линейным пространством остальных n-1 векторов-решений $X_i(t)$ нормальной системы $X(t)$, $\lambda[f]$ – показатель Ляпунова кусочно-непрерывной при $t \geq 0$ вектор-функции или матрицы $f(t)$.

Величину $\sigma_0 = \sigma_0(A) = \max\limits_{1 \leq k \leq n}\{\lambda[\alpha_k^{-1}]\}$ называют угловой неправильностью [2] системы (1_A). Н.А. Изобовым [3] доказаны оценки отклонений $\lambda_i(A+Q) - \lambda_i(A)$ каждого из характеристических показателей $\lambda_1(A+Q) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+Q)$ возмущенной системы (1_{A+Q}) с произвольным кусочно-непрерывным возмущением $Q \in C^0_{[0,+\infty)}$, удовлетворяющим условию $\lambda[Q] \leq -\sigma < 0$, от соответствующего показателя $\lambda_i(A)$ исходной системы (1_A), которые в общем случае $\sigma_0 \neq \sigma_1$ имеют вид

$$\left|\lambda_i(A+Q) - \lambda_i(A)\right| \leq 2a\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_0}, \quad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

для всех $\sigma \in (\sigma_1 - \rho, \sigma_1]$ с некоторым $\rho = \rho(A) > 0$.

В настоящей работе в частном случае диагональной системы (1_A) ($\sigma_0 = \sigma_0(A) = 0$) в оценках (2) сверху постоянная 2a уточнена до некоторого меньшего своего значения.

Теорема. *Для характеристических показателей $\lambda_i(A)$ диагональной системы (1_A) с коэффициентом неправильности Гробмана $\sigma_1 = \sigma_1(A) > 0$ и характеристических показателей $\lambda_i(A+Q)$ возмущенной системы (1_{A+Q}) с* *матрицей-возмущением* $Q \in C^0_{[0,+\infty)}$, *удовлетворяющей условию* $\lambda[Q] \le -\sigma < 0$, *выполнены оценки*

$$\lambda_i(A+Q) - \lambda_i(A) \le 2a\frac{2a}{2a+\sigma}\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma_1}, \ \forall\sigma \in \left(\sigma_1 - \rho(A), \sigma_1\right], \ i=1...n. \qquad (3)$$

Основным элементом доказательства этой теоремы является следующая

Лемма. *Пусть числа* $2a \ge \sigma_1 > 0$ *и кусочно-непрерывные функции* $a_i(\cdot):\left[0,+\infty\right) \to [-a,a]$, i=1...n, *таковы, что для показателей* $\lambda_i = \lambda[x_i]$ *экспоненты* $x_i(t) \equiv \exp\int\limits_0^t a_i(\tau)d\tau$ *и* $\delta_i = \lambda[1/x_i]$ *выполнены условия* $0 < \sigma_1 = \max\limits_{1\le i\ge n}\{\lambda_i + \delta_i\}$. *Тогда для компоненты* $y_k(t)$ *с показателем* $\lambda[y_\kappa] = \lambda[y]$ *решения* $y(t) \ne 0$ *системы*

$$\dot{y}_i = a_i(t)y_i + \sum_{j\ne i}^{n} q_{ij}(t)y_i, \ i=1...n, \qquad (4)$$

кусочно-непрерывные коэффициенты $q_{ij}(t)$ *которой удовлетворяют условиям*

$$\left|q_{ij}(t)\right| \le q(\varepsilon)\exp(\varepsilon - \sigma)t, \ \forall\varepsilon > 0, \ t \ge 0, \qquad (5)$$

выполнена оценка

$$\lambda[y_k] - \lambda_k \le d_0(\sigma_1 - \sigma), \ \sigma \in \left(0, \sigma_1\right], \qquad (6)$$

с постоянной $d_0 = 4a^2/(2a+\sigma)\sigma_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть показатель $\lambda[y_\kappa] \equiv \tilde{\lambda}_k$ компоненты $y_k(t)$ решения $y(t) \ne 0$ реализуется по последовательности $\{t_m\} \uparrow +\infty$. Из интегрального представления

$$y_k(t) = x_k(t)[y_k(0) + \int\limits_0^t x_k^{-1}(\tau)\sum_{j\ne k}^{n} q_{kj}(\tau)y_j(\tau)d\tau], \ t \ge 0, \qquad (7)$$

этой компоненты аналогично [3] получаем оценку

$$\left|y_k(t_m)\right| \le C(\varepsilon)\int\limits_0^{t_m}\frac{x_k(t_m)}{x_k(\tau)}\exp(\tilde{\lambda}_k - \sigma + \varepsilon)d\tau, \ \forall\varepsilon > 0, \qquad (8)$$

с некоторой постоянной C(ε)>0. Через $\tau_m \in \left[0, t_m\right]$ обозначим момент, значение подинтегральной функции в котором мажорирует саму эту функцию при всех $\tau \in \left[0, t_m\right]$. Без нарушения общности можно считать существующим предел $\lim\limits_{m\to+\infty}(\tau_m/t_m) = \alpha \in \left[0,1\right)$ (неравенство α<1 следует из оценки (8)).

Считая без нарушения общности существующими записываемые ниже пределы, введем следующие обозначения и запишем возникающие при этом неравенства:

$$\lim_{m\to+\infty} t_m^{-1}\ln x_k(t_m) = \lambda_k' \le \lambda_k, \ \lim_{m\to+\infty} \tau_m^{-1}\ln x_k(\tau_m) = \lambda_k'' \le \lambda_k,$$

$$\lim_{m\to+\infty}(t_m - \tau_m)^{-1}\ln[x_k(t_m)/x_k(\tau_m)] = a_k \le a. \qquad (9)$$

Из оценки

$$\left|y_k(t_m)\right| \le C(\varepsilon)t_m x_k(t_m)x_k^{-1}(\tau_m)\exp(\tilde{\lambda}_k + \varepsilon - \sigma)\tau_m, \ m \in N, \qquad (10)$$

являющейся следствием оценки (8), с учетом третьего соотношения (9) получаем неравенство *)

$$\tilde{\lambda}_k t_m \le C(\varepsilon) + \ln t_m + \varepsilon(\tau_m + t_m) + a_k(t_m - \tau_m) + \tilde{\lambda}_k \tau_m - \sigma\tau_m$$

для достаточно больших $m \in N$. Разделив обе его части на t_m и перейдя в нем к пределу при $m \to +\infty$, получим в силу произвола $\varepsilon > 0$ оценку

$$\tilde{\lambda}_k \le a_k - \sigma\alpha/(1-\alpha) \equiv f_1[\alpha/(1-\alpha)]. \qquad (11_1)$$

С другой стороны, из (10) с учетом первых двух соотношений (9) аналогичным образом получаем оценку

$$\tilde{\lambda}_k \le \lambda_k' + (\lambda_k' - \lambda_k'' - \sigma)\alpha/(1-\alpha) \equiv f_2[\alpha/(1-\alpha)]. \qquad (11_2)$$

Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай $\lambda_k' \le \tilde{\lambda}_k$, т.к. в противном случае имели бы неравенства $\tilde{\lambda}_k \le \lambda_k' \le \lambda_k$, а тем самым и требуемую оценку (6). В рассматриваемом случае из (11_1) имеем неравенства

$$\alpha < \frac{a_k - \lambda_k'}{a_k - \lambda_k' + \sigma} \le \frac{2a}{2a + \sigma}.$$

Из неравенств $\tilde{\lambda}_k > \lambda_k'$ и (11_2) следует неравенство $\lambda_k' - \lambda_k'' - \sigma > 0$ и поэтому правые части оценок (11_1) и (11_2) есть линейные аргумента $\beta \equiv \alpha/(1-\alpha) \in [0, +\infty)$, соответственно убывающая и возрастающая функции, принимающие в начальный момент значения $a_k \ge \lambda_k'$. Поэтому из (11_1) и (11_2) имеем неравенства

$$\tilde{\lambda}_k \le \min\{f_1(\beta), f_2(\beta)\} \le \inf_{\beta \in [0,+\infty)} \max\{f_1(\beta), f_2(\beta)\} = f_2(\beta_0), \quad f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0).$$

Так как $\beta_0 = (a_k - \lambda_k')/(\lambda_k' - \lambda_k'')$, $\lambda_k' - \lambda_k'' \le \sigma_1$ и $a_k - \lambda_k' > a_k - \tilde{\lambda}_k \ge \sigma\beta_0 > 0$, то для $\tilde{\lambda}_k$ имеем теперь окончательную оценку

$$\tilde{\lambda}_k \le \lambda_k' + (a_k - \lambda_k')(\sigma_1 - \sigma)/\sigma_1 = \lambda_k' + \alpha(a_k - \lambda_k'')(\sigma_1 - \sigma)/\sigma_1 \le$$
$$\le \lambda_k + 4a^2(2a + \sigma)^{-1}(\sigma_1 - \sigma)/\sigma_1.$$

Лемма доказана.

С учетом установленной в [3] оценки снизу (и которую предложенным способом уточнить не удается) справедливо следующее

Следствие. Для решения $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) \ne 0$ системы (1_{A+Q}), матрица возмущений $Q(t) = \left((q_{ij}(t))\right)_{i,j=1}^{n}$ которой удовлетворяет условию $\lambda[Q] \le -\sigma < 0$, с показателем $\lambda[y] = \lambda[y_k]$ справедливы неравенства

$$-2a\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} \le \lambda[y] - \lambda_k \le 2a\frac{2a}{2a + \sigma}\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1}, \qquad \sigma \in (0, \sigma_1],$$

в которых σ_1— коэффициент неправильности Гробмана диагонального приближения (1_A) системы (1_{A+Q}).

С использованием доказательства предыдущей леммы и леммы 2 из работы [3] может быть доказано следующее

Утверждение 1. Пусть диагональная система (1_A) с кусочно-непрерывными и ограниченными (постоянной a>0) коэффициентами имеет коэффициент неправильности Гробмана $\sigma_1 > 0$ и характеристические показатели

* $C(\varepsilon)$ – универсальная постоянная

$\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$, разбитые на $q \in \{2,\ldots n\}$ групп N_k совпадающих между собой и равных Λ_k чисел λ_i при $i \in N_k$, причем $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$. Тогда существует такая постоянная $\rho = \rho(A) > 0$, что для компоненты решения $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_n(t))$ системы (4) с показателем $\lambda[y] = \lambda[y_k]$, $k \in N_{s(k)}$, $s(k) \in \{1,\ldots,q\}$, выполнены неравенства $\lambda[y] \le \Lambda_s - d_1(\sigma_1 - \sigma)$ при $(\sigma_1 - \sigma) \in [0,\rho]$, $i \notin N_s$, с постоянной $d_1 = (2+n)[1+d_0]$.

Это утверждение допускает следующее обобщение на случай нормальной системы решений системы (1_{A+Q}).

Утверждение 2. Пусть выполнены все условия утверждения 1. Тогда существует такая постоянная $\rho = \rho(A) > 0$, что при $(\sigma_1 - \sigma) \in [0,\rho]$ нормальная упорядоченная система решений $Y(t) = [Y_1(t),\ldots,Y_n(t)]$ системы (1_{A+Q}) с $\lambda[Q] \le -\sigma$ состоит из q групп N_k решений $Y_i(t) = (y_{1i}(t),\ldots,y_{ni}(t))$ с показателями

$$-2a(\sigma_1 - \sigma)/\sigma_1 \le \lambda[Y_i] - \Lambda_k \le d_0(\sigma_1 - \sigma), \quad i \in N_k, \quad k = 1,\ldots,q, \qquad (12)$$

и показателями своих компонент

$$\lambda[y_{ji}] < \Lambda_k - d_1(\sigma_1 - \sigma) \text{ при } j \notin N_k \text{ и } i \in N_k.$$

Для окончательного доказательства сформулированной теоремы теперь достаточно воспользоваться правой оценкой (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. С. 44.
2. ***Изобов Н.А., Степанович О.П.*** Archivum Mathematicum. 1990, Vol 26, №2-3. P. 107-114.
3. ***Изобов Н.А.*** Дифференциальные уравнения. 1954, Т.9, №2. С. 129- 136.

SUMMARY

In this work we consider linear differential systems with piece-continued bounded assumed matrix and with matrix of perturbation $Q(t)$ *with exponent of Ljapunov* $\lambda[Q] \le -\sigma < 0$. *If assumed matrix* $A(t)$ *is diagonal, then we improve estimates from above of a difference of exponents* $\lambda_i(A+Q) - \lambda_i(A)$ *of disturbed system* $\dot{y} = A(t)\cdot y + Q(t)\cdot y$ *and of assumed system* $\dot{x} = A(t)\cdot x$.