6. *Gorenstein D.* The classification of finite simple groups. Vol.1 : Groups of noncharacteristic 2 type. New York, London: Plenum Press, 1983.
7. *Rickman B.* Groups wich admitt a fixed-point-free automorphism of order p^2 // J.Algebra. 1979. Vol 59. № 1. P. 77 – 171.
8. *Гаген Т.М.* Некоторые вопросы теории конечных групп. // В кн. «К теории конечных групп». М.: Мир, 1979. С. 13-97.
9. *Глауберман Дж.* О разрешимых сигнализаторных функторах на конечных группах // В кн. «К теории конечных групп». М.: Мир, 1979. С. 112-143.
10. *Чунихин С.А.* Подгруппы конечных групп. Мн.:Наука и техника, 1964.
11. *Ведерников В.А.* О конечных группах с данными бипримарными подгруппами // В кн. «Конечные группы». Мн.: Наука и техника, 1975. С. 24-29.
12. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
13. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of finite simple groups // Math. Surveys and monographs, V. 40, N 2, Providence, RJ: AMS, 1994/
14. *Walter J.H.* The B-conjecture: characterization of Chevalley groups // Memoirs AMS, 1986. V.61. N 3. P.1-196.
15. *Solomon R.* Some results on standard blocks // "Santa-Cruz Conf. finite groups. Santa Cruz, Calif., 1979". Proc. Sumpos. pure math., 1980. V.37. P.43-46.
16. *Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
17. *Gorenstein D., Lyons R.* The local structure of finite groups characteristic 2 type // Memoirs AMS.1983, N 276.

S U M M A R Y

The paper proveds the following theorem: Let X be a finite group admitting automorphism y of order r, $(|X|,r) = 1$, $B = C_X(y) = B_2 \times B_{2'}$ and B_2 – Abelian group. Then X is solvable group 2-length 1.

Поступила в редакцию 25.01.2001

УДК 539.3

С.П. Кунцевич

Параметрические колебания оболочки вращения, близкой к цилиндрической

Благодаря своей легкости и прочности тонкие оболочки получили широкое распространение в инженерных конструкциях. Важной задачей на стадии проектирования таких конструкций является динамический расчет. Для оболочек, испытывающих периодические (силовые, температурные и др.) воздействия, во многих случаях определяющим является расчет на параметрическую устойчивость.

Подавляющее большинство работ по параметрической неустойчивости тонких оболочек относится к тому случаю, когда геометрические и физические характеристики оболочки постоянны, а возбуждаемые колебания покрывают всю поверхность оболочки. Однако наличие косых краев, отклонения срединной поверхности от цилиндрической, неоднородность силового воздействия и ряд других факторов могут приводить к сильной локализации колебаний.

Локальные параметрические колебания тонких цилиндрических оболочек исследовались в работах [1-4]. В данной статье полученные результаты распространяются на случай оболочек вращения, близких к цилиндрическим. Глубина отклонения срединной поверхности оболочки от цилиндрической выбирается такой, чтобы его влияние проявилось уже в нулевом приближении. Естественно будет предположить, что в этом случае, при достаточно малом искривлении образующих, форма параметрических колебаний не должна сильно отличаться от найденной ранее.

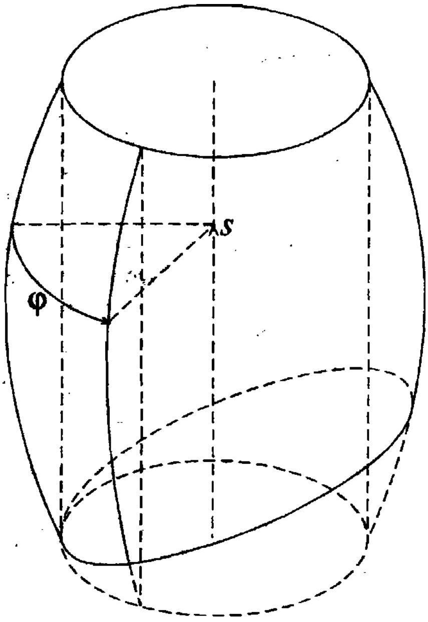

Рис. 1. **Оболочка вращения, близкая к цилиндрической**

Основные уравнения. Рассмотрим оболочку вращения (рис. 1), срединная поверхность которой находится на расстоянии $r(s) = \delta R F(s)$ от кругового цилиндра с радиусом основания R. Здесь $\delta > 0$ – безразмерный малый параметр (будет определен ниже), F(s) – функция, описывающая форму начальных отклонений от цилиндра, имеющая порядок единицы и существенно не возрастающая при дифференцировании.

В качестве ортогональной системы координат примем s, φ, где $s = x R^{-1}$ (x – координата, отсчитываемая вдоль образующей опорного цилиндра), φ – полярный угол. Тогда коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и главные радиусы кривизны, отнесенные к R, будут иметь вид

$$A_1 = \sqrt{1 + \delta^2 (F')^2}, \quad A_2 = 1 + \delta F(s),$$

$$R_1 = -\frac{[1 + \delta^2 (F')^2]^{3/2}}{\delta F''}, \quad R_2 = [1 + \delta F(s)]\sqrt{1 + \delta^2 (F')^2}.$$

Пусть оболочка ограничена двумя (не обязательно плоскими) краями

$$s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi)$$

и находится под действием неоднородного пульсирующего давления

$$Q(\varphi) + \varepsilon Q_f(\varphi) \cos \Omega^* t^*$$

где $Q(\varphi)$, $Q_f(\varphi)$ – статическая и периодическая составляющие давления, Ω^* – частота периодической составляющей, близкая к удвоенной наименьшей собственной частоте колебаний оболочки, t^* – время.

Для описания движения оболочки в окрестности безмоментного нестационарного напряженно-деформированного состояния воспользуемся записанной в безразмерном виде системой уравнений пологих оболочек [5]:

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w + \varepsilon^2 \Delta_T w + \Delta_k \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_k w = 0,$$

где

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)}, \quad \Delta z = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\right],$$

$$\Delta_T z = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2 T_1}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A_1 T_2}{A_2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(T_3 \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(T_3 \frac{\partial z}{\partial s}\right)\right],$$

$$\Delta_K z = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2}{A_1 R_2}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A_1}{A_2 R_1}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\right].$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр; E, ν, h – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки; безразмерные величины задаются следующим образом:

$$w = w^* / R, \quad \Phi = \Phi^* / (\varepsilon^4 E h R^2), \quad (T_1^*, T_2^*, S^*) = \varepsilon^6 E h (T_1, T_2, T_3),$$
$$t = t^* / t_c, \quad t_c = R\sqrt{\rho / E},$$

где w^* – нормальный прогиб, Φ^* – функция напряжений, T_1^*, T_2^*, S^* – мембранные усилия в срединной поверхности оболочки, обусловленные динамическим внешним давлением, t_c – характерное время.

При построении основного напряженного состояния на краях оболочки $s = s_1(\varphi)$, $s = s_2(\varphi)$ будем удовлетворять условиям шарнирного опирания

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0. \qquad (2)$$

Асимптотическое решение. Ранее было показано [1–4], что если образующие цилиндрической оболочки находятся в разных условиях нагружения, то возникающие параметрические колебания сосредоточены в окрестности некоторой «слабой» образующей. Ясно, что при достаточно малом искривлении образующих картина не должна сильно измениться. Поэтому асимптотическое решение задачи (1)–(2), будем искать в том же виде, что и для цилиндрической оболочки:

$$w \cong \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j (s, \xi, t_0, t_1) \exp\left\{ i \left[\varepsilon^{-1/2} p\xi + \frac{1}{2} b\xi^2 \right] \right\}$$
$$\Phi \cong \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_j (s, \xi, t_0, t_1) \exp\left\{ i \left[\varepsilon^{-1/2} p\xi + \frac{1}{2} b\xi^2 \right] \right\} \qquad (3)$$
$$\xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0), \qquad \operatorname{Im} b > 0$$

Здесь $w_j (s, \xi, t_0, t_1)$, $f_j (s, \xi, t_0, t_1)$, p, b – функции и коэффициенты, подлежащие определению, $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$ – «медленное время». Последнее неравенство в (3) обеспечивает затухание функций вдали от линии $\varphi = \varphi_0$.

Чтобы влияние отклонения $F(s)$ проявлялось уже в нулевом приближении итерационного процесса, в качестве характерной глубины следует положить [6]:

$$\delta = \varepsilon^2. \qquad (4)$$

Предполагая малую изменяемость давления как по времени, так и по координатам, из уравнений безмоментной теории оболочек найдем окружное усилие [7]:

$$T_2 (s, \varphi, t) = q (\varphi) + \varepsilon q_f (\varphi) \cos \Omega t + O(\varepsilon^2), \qquad (5)$$

Здесь $q (\varphi) = Q(\varphi) R / (\varepsilon^6 E h)$, $q_f (\varphi) = Q_f (\varphi) R / (\varepsilon^6 E h)$, $\Omega = t_c \Omega^*$.

Предполагается, что функции $s_i(\varphi)$, $q(\varphi)$, $q_f(\varphi)$ бесконечно дифференцируемы и существенно не возрастают при дифференцировании. Разложим их в ряды в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$, например,

$$q (\varphi) = q (\varphi_0) + \varepsilon^{1/2} q' (\varphi_0) \xi + 0{,}5\, \varepsilon q'' (\varphi_0) \xi^2 + \ldots \qquad (6)$$

Подставим разложения (3)–(6) в задачу (1)–(2). Исключив функции Φ_k, получаем последовательность уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} D_j w_{n-j} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

и соответствующие им граничные условия

$$\sum_{j=0}^{n} L_j w_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} L_j \frac{\partial^2 w_{n-j}}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = s_1 (\varphi_0),\ s = s_2 (\varphi_0). \qquad (7)$$

Здесь операторы D_j, L_j с точностью до H, H* совпадают с приведенными в [3].

В нулевом (n = 0) приближении имеем однородную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} + H w_0 = 0, \tag{8}$$

$$w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1(\varphi_0),\ s = s_2(\varphi_0),$$

где

$$H = \frac{1}{p^4}\frac{\partial^4}{\partial s^4} + \frac{2}{p^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right)^2 - p^2 q(\varphi_0) + p^4.$$

Эта задача имеет решение в виде

$$w_0(s, \xi, t_0, t_1) = y(s)\, P_0(\xi, t_0, t_1),$$

$$P_0(\xi, t_0, t_1) = P_{0,c}(\xi, t_1)\cos\omega_0 t_0 + P_{0,s}(\xi, t_1)\sin\omega_0 t_0,$$

где $P_{0,c}(\xi, t_1)$, $P_{0,s}(\xi, t_1)$ – некоторые полиномы по ξ с коэффициентами, зависящими от t_1; ω_0 – нулевое приближение для наименьшей собственной частоты колебаний оболочки, а $y(s)$ – собственная функция однородной краевой задачи

$$H(p, \varphi_0)\, y - \lambda y = 0, \quad y = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1(\varphi_0),\ s = s_2(\varphi_0) \tag{9}$$

Параметр ω_0 и собственное значение λ задачи (9) связаны соотношением $\lambda = (\omega_0)^2$. Наименьшее положительное собственное значение λ_0 является функцией параметров p и φ_0 и может быть найдено, например, с помощью одного из численных методов.

Пусть $\lambda_0^\circ = \min\limits_{p,\,\varphi_0} \lambda_0(p, \varphi_0) = \lambda_0(p^\circ, \varphi_0^\circ)$, где p°, φ_0° находятся из условий

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial p} = 0 \tag{10}$$

В дальнейшем индекс ° у p°, φ_0°, λ_0° опускается.

Как известно [8], параметрические колебания возникают в случае, когда отношение удвоенной частоты собственных колебаний к частоте нагружения оказывается близким к целому числу. Рассмотрим случай главного параметрического резонанса, когда $\Omega \approx 2\omega_0$. Пусть

$$\Omega = 2\omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad \sigma \sim 1 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

где σ – параметр расстройки частоты Ω периодической составляющей внешней нагрузки.

Тогда во втором приближении (n = 2) получаем дифференциальное уравнение для нахождения амплитуд колебаний $\mathbf{X} = (P_{0,s}, P_{0,c})^T$:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2}\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^2} + a\,\xi\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{2}a + \eta\right)\mathbf{X} +$$

$$+ 2\omega_0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t_1} + d\begin{pmatrix} \cos\sigma t_1 & \sin\sigma t_1 \\ \sin\sigma t_1 & -\cos\sigma t_1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = 0. \tag{11}$$

Здесь

$$a = -i\left(b\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0\,\partial p}\right), \qquad d = \frac{p^2 q_t(\varphi_0)}{2},$$

$$\eta = \frac{i}{2z}\left\{\left(\frac{2s'}{p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\frac{\partial y_0}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{s'}{p^4}\frac{\partial y_0}{\partial s}\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{s'}{p^4}\frac{\partial^3 y_0}{\partial s^3}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\Bigg|_{s_1}^{s_2} + \right.$$

$$+\int_{s_1}^{s_2} u\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_0} y_p - \frac{\partial H}{\partial p} y_\varphi\right) ds \Bigg\}, \quad z = \int_{s_1}^{s_2} u\, y\, ds,$$

где $u(s)$, $y_p(s)$, $y_\varphi(s)$ – решения, соответственно, сопряженной к (9) задачи и задач, полученных из (9) дифференцированием по параметрам p и φ [5], а число b находится из уравнения

$$b^2 \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} + 2b \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0 \partial p} + \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} = 0.$$

Система (11) имеет решение в виде

$$\mathbf{X} = H_m(\theta\, \xi)\, \mathbf{Y}_m \tag{12}$$

где $\mathbf{Y}_m = (S_m(t_1), C_m(t_1))^T$, $H_m(\theta\, \xi)$ – полином Эрмита степени m,

$$\theta = \left(\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0 \partial p}\right)^2\right)^{1/4} \left(\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2}\right)^{-1/2},$$

а вектор-функция $\mathbf{Y}_m$ является решением уравнения

$$\dot{\mathbf{Y}}_m - \mathbf{A}_m(t_1)\, \mathbf{Y}_m = 0, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{A}_m(t_1) = \begin{pmatrix} -a_1 \sin \sigma t_1 & -a_{2,m} + a_1 \cos \sigma t_1 \\ a_{2,m} + a_1 \cos \sigma t_1 & a_1 \sin \sigma t_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{d}{2\,\omega_0}, \qquad a_{2,m} = a \frac{2m+1}{4\,\omega_0} + \frac{\eta}{2\,\omega_0}.$$

Полученная система является инвариантной относительно формы оболочки и вида нагружения, т.к. уравнения (13), с точностью до коэффициентов, были выведены ранее при решении других задач [1–4] о локальных параметрических колебаниях тонких оболочек.

Таким образом, форма локальных параметрических колебаний оболочки вращения, близкой к цилиндрической, имеет вид

$$w = \left\{ \left[C_m(\varepsilon\, t) \cos \omega_0 t + S_m(\varepsilon\, t) \sin \omega_0 t \right] y(s)\, H_m(\theta\, \xi) + O(\varepsilon^{1/2}) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ i \left[\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2 \right] \right\}. \tag{14}$$

Формально, процесс нахождения $w_j(s, \xi, t_0, t_1)$ $(j \geq 1)$ можно продолжить, однако на эти функции будут влиять слагаемые, отброшенные при написании уравнений (1).

В случае постоянного давления ($Q_t \equiv 0$) система (13) допускает решение в явном виде. Тогда формула (14) определяет форму свободных локальных колебаний оболочки, близкой к цилиндрической.

При некоторых соотношениях параметров задачи решения системы (13) неустойчивы. С точки зрения динамического критерия устойчивости упругих систем это означает параметрическую неустойчивость оболочки. Для случая абсолютно-упругой оболочки области неустойчивости системы (13) были найдены в [1]. В частности, было показано, что оболочка параметрически неустойчива в случае, когда частота периодической составляющей нагрузки находится в пределах

$$\Omega^- = 2\,\omega_0 + 2\,\varepsilon\,(a_{2,m} - a_1) \leq \Omega \leq 2\,\omega_0 + 2\,\varepsilon\,(a_{2,m} + a_1) = \Omega^+.$$

Примеры. При некоторых частных предположениях о функции F(s), краевая задача (9) допускает решение в явном виде. Пусть отклонение срединной поверхности оболочки от цилиндрической задается формулой

$$F(s) = \kappa\left(1 - \frac{s^2}{L^2}\right), \quad -L \le s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi) \le L, \tag{15}$$

где κ — некоторая постоянная. Если $\kappa = 0$, то формула (15) определяет цилиндрическую, при $\kappa > 0$ — выпуклую, при $\kappa < 0$ — вогнутую оболочку.

При таком выборе функции $F(s)$ оператор H в уравнении (8) примет вид

$$H = \frac{1}{p^4}\frac{\partial^4}{\partial s^4} + \frac{4\kappa}{p^2 L^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{4\kappa^2}{L^4} - p^2 q(\varphi_0) + p^4,$$

а уравнение (9) будет иметь решение

$$y(s) = \sin \pi \frac{s - s_1(\varphi_0)}{s_2(\varphi_0) - s_1(\varphi_0)},$$

если

$$\lambda = \left(\frac{\pi^2}{p^2 (s_2(\varphi_0) - s_1(\varphi_0))^2} + \frac{2\kappa}{L^2}\right)^2 - p^2 q(\varphi_0) + p^4. \tag{16}$$

В качестве примера рассмотрим оболочку с $R / h = 100$, $\nu = 0.3$, на которую действует внешнее давление $q(\varphi) = q_f(\varphi) = 1$. Пусть отклонение срединной поверхности оболочки от цилиндра задается формулой (15), а края имеют вид $s_1(\varphi) = -L + (1 - \cos\varphi)\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (здесь α – угол наклона края), $s_2(\varphi) = L$.

Исследуя на минимум функцию $\lambda(p, \varphi_0)$, определяемую формулой (16), находим, что в этом случае наиболее слабой является самая длинная образующая $\varphi_0 = 0$. В окрестности этой образующей на начальном промежутке времени и будут сосредоточены формы параметрических колебаний.

На рис.2 показана зависимость границ главной области неустойчивости $\Omega^{\pm}$ от глубины отклонения κ при $\alpha = 30°$, на рис.3 – от угла наклона края α при $\kappa = -0.5$ для оболочек разной длины. Пунктирные линии соответствуют удвоенным собственным частотам колебаний оболочки. Для получения размерного значения необходимо $\Omega^{\pm}$ разделить на t_c.

Следует заметить, что для вогнутых оболочек ($\kappa < 0$) с увеличением $|\kappa|$ погрешность приведенных формул возрастает.

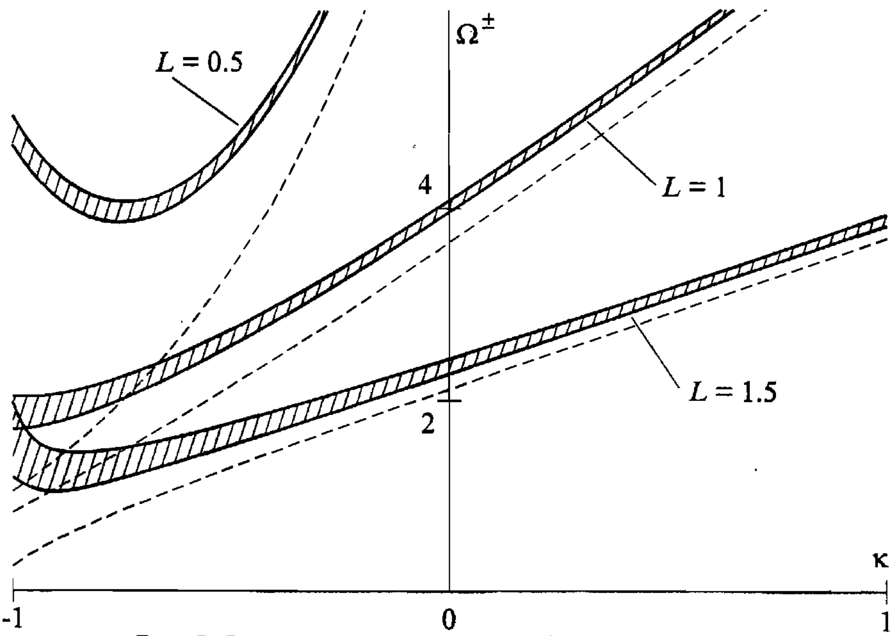

Рис. 2. **Зависимость главной области неустойчивости от глубины отклонения κ**

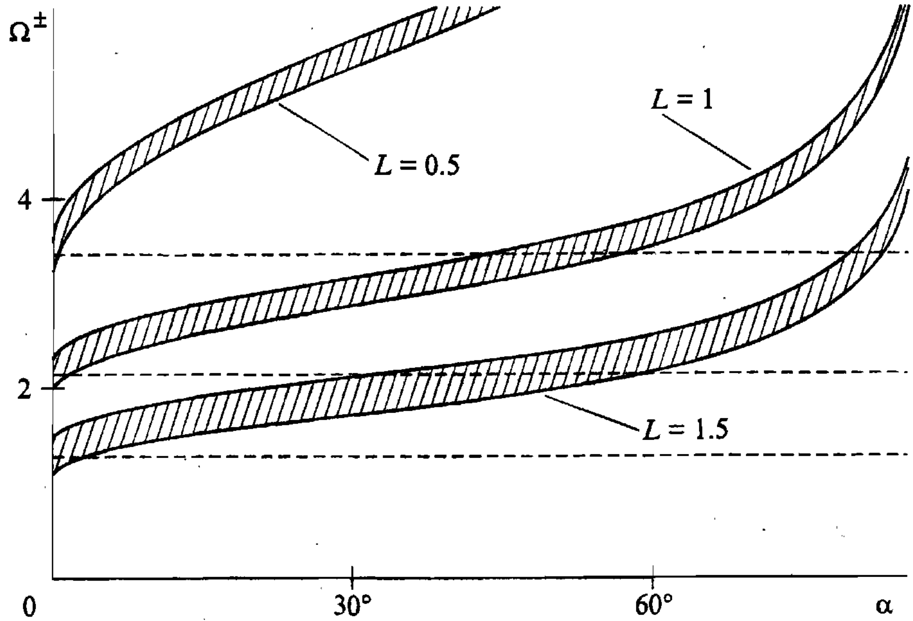

Рис. 3. **Зависимость главной области неустойчивости от угла наклона края** α

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Mikhasev G.I., Kuntsevich S.P.*** Thermoparametric Vibrations of Noncircular Cylindrical Shell in Non-stationary Temperature Field // Technische Mechanik. 1997. Band 17, Heft 2. S.113-120.
2. ***Mikhasev G.I.*** Free and Parametric Vibrations of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial Loads // Technische Mechanik, 1997. Band 17, Heft 3. S.209-216.
3. ***Кунцевич С.П.*** Параметрические колебания некруговой вязкоупругой цилиндрической оболочки // Веснік ВДУ, 1998, № 3(9). С.87-92.
4. ***Кунцевич С.П.*** Локальные параметрические колебания некруговой цилиндрической оболочки под действием неоднородного пульсирующего давления // Восьмая Белорусская математическая конференция. Тезисы докладов. Минск, 2000. Т.3. С.121.
5. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
6. ***Михасев Г.И.*** Некоторые задачи устойчивости оболочек, близких к цилиндрическим // Вестник ЛГУ. Сер.1, 1987, вып.1 (№1). С.67-72.
7. ***Работнов Ю.Н.*** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. С. 442.
8. ***Прочность. Устойчивость. Колебания.*** Справочник в 3 т. Т.3 / Под ред. ***И.А. Биргера и Я.Г. Пановко.*** М.: Машиностроение, 1968. С. 347.

SUMMARY

Local parametrical vibrations of a thin shell closed to a cylinder under pulsing pressure are investigated. The solutions of the governing equations are found in the form of functions quickly decreasing far from the «weakest» generatrix. Using Tovstik's method, two-dimensional boundary value problem is reduced to a sequence of one-dimensional boundary value problems. The amplitude equation and the form of local parametrical oscillations have been obtained.

Поступила в редакцию 5.10.2000