УДК 512.542

А.В. Сементовский

Классовые функции и нормальное строение конечных π-обособленных групп

На протяжении всей статьи π обозначает фиксированное множество простых чисел, π' – его дополнение во множестве всех простых чисел. Все рассматриваемые характеры соответствуют представлениям над полем комплексных чисел.

Напомним, что группа называется π-обособленной, если каждый фактор ее главного ряда является π- либо π'-группой.

Для функции θ, отображающей множество классов сопряженных элементов группы G в поле комплексных чисел, через θ^* будем обозначать ограничение θ на классы сопряженных π-элементов группы G.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия и факты из [1], приведем их.

Пусть G – π-обособленная группа. Айзексом в [1] определено множество $I_\pi(G)$ комплекснозначных функций на классах сопряженных π-элементов группы G и, в частности, доказано, что при π = p' для фиксированного простого числа p множество $I_\pi(G)$ совпадает с множеством неприводимых брауэровских характеров группы G, соответствующих модулярным представлениям над полем характеристики p.

Следуя Айзексу, будем называть элементы множества $I_\pi(G)$ неприводимыми π-брауэровскими характерами π-обособленной группы G.

В [1] также доказано существование множества $B_\pi(G)$ неприводимых характеров π-обособленной группы G, которые взаимно однозначно соответствуют неприводимым π-брауэровским характерам группы G по правилу: если χ из $B_\pi(G)$ соответствует φ из $I_\pi(G)$, то $\chi^* = \varphi$.

Множество $I_\pi(G)$ является базисом векторного пространства классовых комплекснозначных функций, определенных на π-элементах π-обособленной группы G [1]. В [2] для $\varphi \in I_\pi(G)$ определено ядро Ker φ следующим образом:

$$\mathrm{Ker}\,\varphi / L = O_{\pi'}(G / L),\ \text{где } L = \langle x \mid x \in G,\ \varphi(x) = \varphi(1) \rangle.$$

Лемма 5.7 [2] утверждает, что если $\chi \in B_\pi(G)$, то Ker χ = Ker χ^*.

Хоукс и Хамфрис в [3] определили CR-подгруппу группы G как подгруппу, все характеры которой продолжаются на G.

По аналогии с CR-подгруппой автором определена CR_π-подгруппа π-обособленной группы G:

Определение 1 [4]. *Пусть G – π-обособленная группа. Ее подгруппу H назовем CR_π-подгруппой группы G, если для всякой функции $\varphi \in I_\pi(H)$ существует такая функция $\psi \in I_\pi(G)$, что $\psi_H = \varphi$.*

Следуя [5], будем называть π-дополнением к подгруппе H группы G такую подгруппу K, что G = HK и H $\cap$ K - π'-группа.

Остальные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [5] и [6].

Достаточно много работ, например, [2], [3], [7] посвящены вопросу существования нормального дополнения к CR-подгруппе в зависимости от налагаемых на группу и подгруппу условий. Исследование условий существования нормального π-дополнения к CR_π-подгруппе π-обособленной группы проводилось автором в [4] и [8]. Этому вопросу посвящена и настоящая работа.

Теорема 1. *Пусть G – π-обособленная группа, G_π, $G_{\pi'}$ – ее холловская π- и π'-подгруппы соответственно и $S = N_G(G_\pi) \cap N_G(G_{\pi'})$. Если S – CR_π-подгруппа группы G, то S имеет нормальное π-дополнение в G.*

Доказательство. Согласно лемме 1 [9] $S = S_\pi \times S_{\pi'}$, где $S_\pi = N_{G_\pi}(G_{\pi'})$, $S_{\pi'} = N_{G_{\pi'}}(G_\pi)$.

Рассмотрим, что представляют собой множества $I_\pi(S)$ и $B_\pi(S)$. Согласно следствию 5.3 [1] $S_{\pi'} \subseteq \mathrm{Ker}\ \varphi$ для всякого $\varphi \in I_\pi(S)$. С другой стороны, $I_\pi(S_\pi) = \mathrm{Irr}(S_\pi)$. Поэтому

$I_\pi(S) = \{\chi^* \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S), \mathrm{Ker}\ \varphi \supseteq S_{\pi'}\}$ и $B_\pi(S) = \{ \chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S), \mathrm{Ker}\ \varphi \supseteq S_{\pi'}\}$.

По условию теоремы для произвольной функции $\varphi \in I_\pi(S)$ существует функция $\psi \in I_\pi(G)$ такая, что $\psi_S = \varphi$. Пусть $\chi \in B_\pi(S)$ и $\chi^* = \varphi$. Согласно [1] существует характер $\xi \in B_\pi(G)$ такой, что $\xi^* = \psi$. Докажем, что $\xi_S = \chi$.

Сначала докажем, что $\xi_S \in \mathrm{Irr}(S)$. От противного, пусть $\xi_S = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n > 1$, $\xi_i \in \mathrm{Irr}\ (S)$. Тогда $\xi_S^* = \xi_1^* + \ldots + \xi_n^* = \varphi$, что невозможно, так как в силу предложения 5.1 [2] для любого ξ_i $\xi_i^* = \Sigma\alpha_j\varphi_j$, где $\varphi_j \in I_\pi(S)$. Итак, $\xi_S \in \mathrm{Irr}(S)$.

Теперь докажем, что $\xi_S = \chi$. Теорема 5.3 [2] утверждает, что $\mathrm{Ker}\ \varphi \subseteq \mathrm{Ker}\ \psi$, следовательно, $S_{\pi'} \subseteq \mathrm{Ker}\ \psi$. Согласно лемме 5.7 [2] $S_{\pi'} \subseteq \mathrm{Ker}\ \xi_S$. Итак, $\xi_S \in B_\pi(S)$ и $\xi_S^* = \chi^* = \varphi$, следовательно, $\xi_S = \chi$.

Из вышеуказанного следует, что для любого неприводимого характера χ подгруппы S с условием $S_{\pi'} \subseteq \mathrm{Ker}\ \chi$ существует характер $\xi \in B_\pi(G)$ такой, что $\xi_S = \chi$. Тогда S_π – CR-подгруппа группы G и по лемме 4 [9] S_π имеет в G нормальное дополнение, обозначим его через D. Очевидно, D – нормальное π-дополнение к S в G. Теорема доказана.

Пользуясь терминологией [5], теорема 1 утверждает, что если нормализатор č-системы $\{G_\pi, G_{\pi'}\}$ π-обособленной группы G является CR_π-подгруппой группы G, то он имеет в G нормальное π-дополнение.

Безусловно яркими результатами являются нормальная дополняемость $\mathfrak{F}$-нормализатора [2] и $\mathfrak{F}$-проектора [3] в разрешимой группе для произвольной локальной формации $\mathfrak{F}$, если таковые подгруппы являются CR-подгруппами группы. Автором в [4] получены результаты о существовании нормальных π-дополнений к $\mathfrak{F}$-нормализатору и $\mathfrak{F}$-проектору π-обособленной группы G, в частности, получено обобщение нормальной дополняемости $\mathfrak{F}$-нормализатора в разрешимой группе [2]. Ключом к доказательству подобных результатов является следующая

Лемма 1 (Лемма 4.2 [4]). Пусть H – CR_π-подгруппа π-обособленной группы G, $N \lhd G$ и для всякой фактор-группы G / K такой, что $K \neq 1$ и HK / K – CR_π-подгруппа группы G / K, справедливо: $HK/K \cap NK/K$ – π'-группа. Тогда либо $H \cap N$ – π'-группа, либо ее холловская π-подгруппа $(H \cap N)_\pi$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы H.

Применим лемму 1 к следующей ситуации. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – π-обособленная группа и CR_π-подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором либо $\mathfrak{F}$-нормализатором G. Тогда $G = HG^{\mathfrak{F}}$ [5]. Пусть G является минимальным контрпримером к утверждению, что H имеет нормальное π-дополнение в G. Ввиду того, что для любой подгруппы $K \lhd G$, $K \neq 1$ HK / K – $\mathfrak{F}$-проектор ($\mathfrak{F}$-нормализатор) фактор-группы G / K и $G^{\mathfrak{F}}$ / K - $\mathfrak{F}$-корадикал G / K, из минимальности G в силу леммы 1 следует, что $(G^{\mathfrak{F}} \cap H)_\pi$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы H.

Теорема 2. *Пусть G – обособленная группа, $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$-проектор группы G и H является CR_π-подгруппой группы G. Если хотя бы одна из групп $G^{\mathfrak{F}}$ и H π-нильпотентна, то H обладает нормальным π-дополнением в G.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к утверждению теоеремы. В силу леммы 1 холловская π-подгруппа $(H\cap G^{\mathfrak{F}})_\pi$ группы $H\cap G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы H.

Пусть группа $G^{\mathfrak{F}}$ – π-нильпотентна. Тогда π-нильпотентна и группа $H\cap G^{\mathfrak{F}}$, все силовские p-подгруппы которой для $p\in\pi$ и холловская π'-подгруппа характеристические в $H\cap G^{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, нормальны в H. Поэтому $(H\cap G^{\mathfrak{F}})_\pi = (H\cap G^{\mathfrak{F}})_p$ для некоторого p из π. Для данного p $O_{p'}(H) = 1$ и, применяя лемму 4.3 [4], получим, что $O^p(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$, и, следовательно, $G^{\mathfrak{F}}$ – p'-группа. Теперь $(H\cap G^{\mathfrak{F}})_\pi = (H\cap G^{\mathfrak{F}})_p = 1$ и $H\cap G^{\mathfrak{F}}$ – π'-группа, противоречие.

Пусть теперь группа H π-нильпотентна. Тогда и $H\cap G^{\mathfrak{F}}$ также π-нильпотентна, следовательно, $(H\cap G^{\mathfrak{F}})_\pi = (H\cap G^{\mathfrak{F}})_p$ для некоторого p из π. Ввиду того, что $(H\cap G^{\mathfrak{F}})_p$ – единственная нормальная в H подгруппа, H является p-группой. Очевидно, локальная формация содержит все q-группы для любого простого числа q из $\pi(\mathfrak{F})$, поэтому ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности H в G подгруппа H является силовской p-подгруппой группы G. Тогда $I_\pi(H) = I_p(H) = Irr(H)$ и все неприводимые характеры H продолжаются на G. В силу а) предложения 4.1 [4] всякие два элемента из H, сопряженные в H, сопряжены и в G. Теперь H имеет в G нормальное дополнение по известной теореме Брауэра-Судзуки (8.22 [6]).

Теорема доказана.

Заменив в первой части доказательства теоремы 2 «$\mathfrak{F}$-проектор» на «$\mathfrak{F}$- нормализатор», получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – π-обособленная группа с π-нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если $\mathfrak{F}$-нормализатор H группы G является CR_π-подгруппой группы G, то H имеет в G нормальное π-дополнение.*

Лемма 2. *Пусть G – π-обособленная и σ-обособленная группа для множеств простых чисел π и σ, $\sigma\in\pi$. Пусть подгруппа H группы G является CR_π-подгруппой группы G. Тогда H – CR_σ-подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $\varphi\in I_\sigma(H)$. По теореме 1.1 [8] существует $\psi\in I_\pi(H)$ такой, что ограничение ψ на σ-элементы группы H дает φ. Так как H – CR_π-подгруппа группы G, то существует $\xi\in I_\pi(G)$ с условием $\xi_H = \psi$. Очевидно, ограничение ξ на σ-элементы H дает φ.

Обозначим ограничение ξ на σ-элементы группы G через ξ^*. Докажем, что $\xi^*\in I_\sigma(G)$.

От противного, пусть $\xi^*\notin I_\sigma(G)$. Тогда по предложению 5.1 [2]

$$\xi^* = \chi_1^* + \ldots + \chi_n^*, \text{ где } n > 1 \text{ и для всех } i\ \chi_i \in Irr(G).$$

Мы знаем, что $(\xi^*)_H = \varphi \in I_\sigma(H)$. С другой стороны, в силу предложения 5.1 [2]

$$(\xi^*)_H = (\xi_H)^* = ((\chi_1)_H)^* + \ldots ((\chi_n)_H)^* = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\varphi_j,$$

где $k > 1$, $\varphi_j \in I_\sigma(H)$ и α_j – неотрицательные целые числа для всех j. Множество $I_\sigma(H)$ является базисом векторного пространства классовых функций на σ-элементах группы H (предложение 5.1 [2]), поэтому представление $(\xi^*)_H$ в виде линейной комбинации функций из $I_\sigma(H)$ единственно. Противоречие с неприводимостью $(\xi^*)_H$.

Итак, произвольный неприводимый π-брауэровский характер φ подгруппы H продолжается до неприводимого σ-брауэровского характера группы G. Подгруппа H – CR_σ-подгруппа группы G. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* G – *π-разрешимая группа,* $\mathfrak{F}$ – *локальная формация, и пусть $\mathfrak{F}$-нормализатор* H *группы* G *является* CR_π*-подгруппой группы* G. *Тогда* H *имеет в* G *нормальное π-дополнение.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример. Тогда по лемме 1 подгруппа $(H \cap G^{\mathfrak{F}})_p$ для некоторого p из π является единственной минимальной нормальной в H подгруппой.

Из π-разрешимости группы G следует ее p-разрешимость.

По лемме 21.1 [5] $H \subseteq N_G((G^{\mathfrak{F}})_{p'})$. Обозначим $(G^{\mathfrak{F}})_{p'}$ через M. В силу д) предложения 4.1 [4] и леммы 2 $H \cap M^G$ – p'-группа. Но H не содержит нормальных p'-подгрупп, поэтому $H \cap M^G = 1$. Тогда $M^G \neq G^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}/M^G$ – p-группа. Но лемма 4.3[4] утверждает, что $O^p(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Следствие теоремы 4 (теорема C [2]). Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, H – $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G. Если H – CR-подгруппа группы G, то $G^{\mathfrak{F}}$ является нормальным дополнением H в G.

Доказательство следует из теоремы 4 и леммы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Isaacs I.M.*** Characters of π-separable groups // J.Algebra. 1984.V.86. P.98-128.
2. *Isaacs I.M.* Subgroups with the Characters Restriction Property // J.Algebra. 1986.V.100. P.403-420.
3. ***Hawkes T.O., Humpreys J.P.*** A character-theoretic criterion for the existence of normal complements to subgroups of finite groups // J.Algebra. 1985.V.94. P.382-387.
4. ***Сементовский А.В.*** Комплексные характеры и нормальное строение конечных π-обособленных групп. Мн.: Препринт / АН БССР. Ин-т математики, N 30 (430), 1990. – 48 с.
5. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 272 с.
6. ***Isaacs I.M.*** Character theory of finite groups. N.Y.:Acad. Press, 1976. – 303 p.
7. ***Sah C.H.*** Existence of normal complements and extension of characters in finite groups // Ill. J. Math. 1962. V. 6. P.282-291.
8. ***Сементовский А.В.*** Комплексные характеры и их влияние на строение конечной π-обособленной группы. Мн.: Препринт / АН БССР. Ин-т математики, N 5 (11), 1992. – 20 с.
9. ***Сементовский А.В.*** О нормальном строении конечных π-обособленных групп // Весцi АН БССР, 1992, № 2. С. 17-22.

SUMMARY

Let H is a subgroup of a finite π-separable group G. The normal structure of G, is investigated when all π-Brauer characters of H are extended on G. In part, some conditions of existence of the relative normal complements to H in G are obtained in cases, when H is a $\mathfrak{F}$-projector of G or H is a $\mathfrak{F}$-normalizer of G.

Поступила в редакцию 1.12.2000