УДК 512.542

Е.Н. Залесская, Н.Т. Воробьев

О свойстве модулярности решетки частично локальных классов Фиттинга

В теории классов конечных групп известен результат А.Н. Скибы [1] о том, что решетка всех формаций конечных групп модулярна. Однако дуализация этого результата (вопрос о наличии свойства модулярности у решетки всех классов Фиттинга) до настоящего времени остается открытой проблемой (см. проблему 14.47 [2]). Один из ключевых моментов в решении указанной проблемы состоит в определении тех условий, при которых достаточно обширные семейства классов Фиттинга удовлетворяют модулярному тождеству.

В настоящей работе такие условия определяются для ω-локальных классов Фиттинга.

Пусть $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$.

Напомним, всякое отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow$ {классы Фиттинга} называется *ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной* H-*функцией* [3].

Пусть $LR_\omega(f) = \{G | G^{\omega d} \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{E}_{\omega d}}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_{\omega d}$ – класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *ω-локальным* [3], если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой ω-локальной H-функции f.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Будем обозначать через $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X} \vee_{\omega l} \mathfrak{Y}$) наименьший из классов Фиттинга и наименьший ω-локальный класс Фиттинга, содержащий классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Напомним также, если $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{F}$ – ω-локальные классы Фиттинга и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то для них выполняется модулярное тождество, если: $(\mathfrak{X} \vee_{\omega l} \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega l} (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

Пусть Θ – произвольная полная решетка классов Фиттинга. Символом $\Theta \mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначим пересечение всех тех классов Фиттинга из Θ, которые содержат $\mathfrak{X}$.

В других определениях и обозначениях мы следуем монографии Л.А. Шеметкова [4]. Рассматриваются только конечные группы.

Минимальной ω–локальной H-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальную H-функцию $\cap_{i \in I} f_i$ [3], где $\{f_i | i \in I\}$ – набор всех ω-локальных H-функций класса $\mathfrak{F}$.

Через $\vee_{\omega l}(f_i | i \in I)$ обозначим такую ω-локальную H-функцию f, что $f(p) = \omega_l \mathrm{fit}(\cup_{i \in I} f_i(p))$, если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагаем $f(p) = \varnothing$.

Мы будем использовать известные утверждения, которые приведем в качестве следующих лемм.

Лемма 1 [5]. *Пусть* f_i – *минимальная ω-локальная H-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{Y}_i$, $i \in I$. *Тогда* $\vee_{\omega l}$ $(f_i | i \in I)$ - *минимальная ω-локальная* H-*функция класса Фиттинга* $\mathfrak{Y} = \vee_{\omega l}(\mathfrak{Y}_i | i \in I)$.

Лемма 2 [3,6] *Пересечение и произведение двух любых ω-локальных классов Фиттинга является ω-локальным классом Фиттинга.*

Любое множество $\Omega\neq\varnothing$ ω-локальных Н-функций можно частично упорядочить следующим образом: $f\leq\varphi$ тогда и только тогда, когда $f(a)\subseteq\varphi(a)$ для всех $a\in\omega\cup\{\omega'\}$ (f, $\varphi\in\Omega$).

Напомним, что через Supp(f) обозначают носитель ω-локальной Н-функции f и $Supp(f)=\{a\in\omega\cup\{\omega'\} \mid f(a)\neq\varnothing\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{F}$ *– классы Фиттинга с минимальными ω-локальными Н-функциями* x, y, f *соответственно. Если ω-локальные Н-функции* x, y, f *таковы, что* $x \leq f$ *и* $x(a) \vee y(a) = Sn\{G \mid G = G_{x(a)}G_{y(a)}\}$ *для всех* $a \in Supp(x) \cap Supp(y)$, *то* $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y})\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F})$.

Доказательство. Докажем сначала, что модулярное тождество выполняется для минимальных ω-локальных Н-функций x, y, и f. Заметим, что включение $x\vee(y\cap f)\leq(x\vee y)\cap f$ очевидно.

Покажем, что $(x\vee y)\cap f\leq x\vee(y\cap f)$ для всех простых $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

В случае $f(a) = \varnothing$ или $x(a) \vee y(a) = \varnothing$ включение тривиально. Итак, классы Фиттинга $x(a) \vee y(a)$ и $f(a)$ непусты. Отдельно рассмотрим случай, когда один из классов Фиттинга $x(a)$ или $y(a)$ – пуст.

Пусть $x(a) = \varnothing$. Тогда $(x(a) \vee y(a)) \cap f(a) = x(a) \vee (y(a) \cap f(a)) = y(a) \cap f(a)$ и модулярное тождество верно.

Предположим, что класс Фиттинга $y(a)=\varnothing$. В этом случае $(x(a) \vee y(a)) \cap f(a)=$ $= x(a) \cap f(a) = x(a)$.

С другой стороны, $x(a) \vee (y(a) \cap f(a)) = x(a) \vee \varnothing = x(a)$ и модулярное тождество справедливо.

Таким образом, мы можем в дальнейшем полагать, что каждый из классов Фиттинга $x(a)$, $y(a)$ и $f(a)$ непуст.

Пусть теперь K – группа из$(x(a) \vee y(a)) \cap f(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Тогда по условию существует группа $G = G_{x(a)}G_{y(a)}$ такая, что $K \lhd G$.

Итак, $K \lhd G_{f(a)} = G \cap G_{f(a)} = G_{x(a)}G_{y(a)} \cap G_{f(a)} = G_{x(a)}(G_{y(a)} \cap G_{f(a)}) = G_{x(a)}G_{y(a)\cap f(a)}$ Значит, $K \in x(a) \vee (y(a) \cap f(a))$ и поэтому $(x\vee y) \cap f \leq x \vee (y \cap f)$. Справедливость модулярного тождества для минимальных ω-локальных Н-функций x, y, f доказана.

Докажем теперь модулярное тождество $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$. Заметим, что по лемме 22 [3] из того, что $x\leq f$, следует, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, из леммы 1 ω-локальная Н-функция $x\vee y$ определяет ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$. Следовательно, ввиду леммы 20 [3] $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = LR_\omega((x\vee y) \cap f)$. Теперь из леммы 20 [3] следует, что $LR_\omega(y\cap f) = \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}$. Но тогда ввиду леммы 1 $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}) = LR_\omega(x \vee (y \cap f))$.

Следовательно, ввиду модулярного тождества $x \vee (y \cap f) = (x \vee y) \cap f$ получаем, что $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

Теорема доказана.

Пусть "*" – оператор Локетта [7] и f — ω-локальная Н-функция. Через f^* обозначим такую ω-локальную Н-функцию, что $(f(a))^* = f^*(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

С учетом результатов Кусака [8] получаем:

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{F}$ *– классы Фиттинга с минимальными ω-локальными* Н-*функциями* x, y, f *соответственно. Если ω-локальные* Н-*функции* x, y, f *таковы, что* $x \leq f$ *и* $x \leq y^*$, *то* $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

Доказательство. Так как $x \leq y^*$, то ввиду теоремы 2.9 [8] справедливо равенство $x(a) \vee y(a) = Sn\{G \mid G = G_{x(a)}G_{y(a)}\}$ для всех a, таких, что $x(a)$ и $y(a)$ – непустые классы Фиттинга. Теперь модулярное тождество вытекает из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *– ω-локальные классы Фиттинга и* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *– такие ω-локальные Q-замкнутые классы Фиттинга, что* $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = (1)$ *и* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{H}$. *Тогда, если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $(\mathfrak{X} \vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \{G \mid G = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}\}$. Покажем, что $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y} = \mathfrak{M}$.

Если $G\in\mathfrak{M}$, то $G = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}$. По определению $\mathfrak{X}$-радикала группы G следует, что $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Но $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$. Аналогично, $G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$. Значит, произведение $G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$ и поэтому $G \in \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$. Итак, справедливо включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$.

Выясним, что $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{H}$ и по условию $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Y}\mathfrak{F} = \mathfrak{D}$. Аналогично заключаем, что $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}$.

Таким образом, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – подклассы Фиттинга из пересечения $\mathfrak{D}$.

Так как по лемме 2 пересечение и произведение ω-локальных классов Фиттинга является ω-локальным классом Фиттинга, то класс Фиттинга $\mathfrak{D}$ ω-локален. Теперь из того, что $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ - ω-локальные подклассы класса Фиттинга $\mathfrak{D}$, вытекает $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{D}$.

Докажем справедливость обратного включения: $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть $G \in \mathfrak{D}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{M}$. Так как G – группа из произведения $\mathfrak{X}\mathfrak{H}$ и YF, то $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{H}$ и $G/G_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{F}$. Но классы Фиттинга $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ являются Q-замкнутыми. Следовательно, $G/G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}} \in\mathfrak{H}$ и $G/G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{Y}}\in\mathfrak{F}$. Поэтому ввиду изоморфизмов $G/G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}} \cong G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ и $G/G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{Y}} \cong G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ следует, что $G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{H}$ и $G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Но по условию $F \cap H = (1)$ и поэтому $G = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{M}$.

Итак, $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{M}$ и ввиду установленного ранее обратного включения, нами доказано, что $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y} = \{G \mid G = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}\}$. Отсюда вытекает, что $Sn(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y} =$ $=Sn\,\{G \mid G = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}}\}$.

Кроме того, аналогичными рассуждениями можно показать, что $\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y} = \mathfrak{D} = \mathfrak{M}$ и поэтому в данном случае $\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}$. Следовательно, по теореме 2.9 [8] справедливо модулярное тождество $(\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

Докажем справедливость модулярного тождества $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$. Очевидно, что $\mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F}$. Докажем включение $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$. Учитывая теорему 2.9 [8], по установленному выше $(\mathfrak{X}\vee_{\omega l}\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = =(\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} =$ $=\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$. Но $\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{X}\vee_{\omega l}(\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$ и обратное включение справедливо.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Скиба А.Н.*** О конечных подформациях и многообразиях алгебраических систем // Вопросы алгебры, 1986, № 2. С. 7-20.
2. ***Коуровская тетрадь.*** Нерешенные вопросы теории групп // Институт математики. СОРАН, 1999, № 14. – 134 с.
3. ***Скиба А.Н., Шеметков Л.А.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт Гомельского госуниверситета, № 63, 1997. – 44 с.
4. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп // М.: Наука, 1978. – 278 с.
5. ***Воробьев Н.Н.*** Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга // Докл. НАН Беларуси, 2000. Т. 44, № 3. С. 21-25.
6. ***Воробьев Н.Т., Дудкин И.В.*** О произведении ω-локальных классов Фиттинга // Материалы 1-й Международной научной конференции «Вычислительные методы и производство: реальность, проблемы, перспективы». Гомель, 1998. С. 37-38.
7. ***Lockett P.*** The Fitting class $\mathfrak{F}^*$// Math. Z., 1974. Bd. 137, № 2. S. 131-136.
8. ***Cusack E.*** The join of two Fitting classes // Math.Z., 1979. Bd. 167. S. 37-47.

S U M M A R Y

In this paper the modular properties of lattice of partly local Fitting classes are considered and researched.

Поступила в редакцию 31.10.2000