УДК 512. 542

В.В. Подгорная

Конечные группы с одной не $\mathfrak{F}$-добавляемой подгруппой

Подгруппа K конечной группы G называется минимальным добавлением к подгруппе H в группе G если $G = HK$ и $G \neq HK_1$ для любой собственной подгруппы K_1 из K.

Добавления к нормальным подгруппам конечной группы и формационное обобщение добавлений были исследованы Л.А. Шеметковым [1].

Для класса конечных групп $\mathfrak{F}$ через $MS(\mathfrak{F})$ будем обозначать совокупность всех конечных групп, у которых каждая неединичная подгруппа имеет минимальное добавление, принадлежащее $\mathfrak{F}$. В случае, когда $\mathfrak{F}$ – классическая формация свойства класса $MS(\mathfrak{F})$ описаны в [2].

В настоящей статье вводится и исследуется класс $MS_1(\mathfrak{F})$. Конечная группа $G \in MS_1(\mathfrak{F})$, если в группе G существует подгруппа H такая, что каждая неединичная подгруппа, отличная от H, обладает минимальным добавлением, принадлежащим классу $\mathfrak{F}$. Если конечная группа $G \in MS_1(\mathfrak{F})\backslash MS(\mathfrak{F})$, то существует такая подгруппа H, что каждое ее минимальное добавление не принадлежит $\mathfrak{F}$. В этом случае подгруппу H будем называть не $\mathfrak{F}$-добавляемой подгруппой.

Через $\mathfrak{B}$ обозначим класс всех вполне факторизуемых групп. Легко проверить, что $\mathfrak{B}$ является наследственной насыщенной формацией. Кроме того, все силовские подгруппы в группах из $\mathfrak{B}$ элементарные абелевы, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

Доказываются

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственный насыщенный гомоморф. Если группа* $G \in MS_1(\mathfrak{F})\backslash MS(\mathfrak{F})$ *и* H *– не $\mathfrak{F}$-добавляемая подгруппа, то* $H \lhd G$, $|H| = p$, $H \geq \Phi(G)$ *и* $G/H \in \mathfrak{B}$.

Следствие. Справедливы следующие утверждения:

(1) если $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{D}, \mathfrak{U}\}$, то $MS_1(\mathfrak{F}) = MS(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$;

(2) если $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}, \mathfrak{A}\}$, то для группы $G \in MS_1(\mathfrak{F})\backslash MS(\mathfrak{F})$, где H – не $\mathfrak{F}$-добавляемая подгруппа группы G, факторгруппа G/H изоморфна полупрямому произведению двух циклических подгрупп различных простых порядков.

Здесь $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ – классы всех разрешимых, дисперсивных по Оре, сверхразрешимых, нильпотентных и абелевых групп соответственно.

Рассмотрим вначале несколько результатов необходимых в дальнейших исследованиях. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Лемма 1 ([3]). *Если в группе дополняемы все подгруппы простых порядков, то она вполне факторизуема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из результатов работы [3] и также теоремы 7.8 [4].

Через $\mathfrak{B}$ обозначим класс всех вполне факторизуемых групп. Легко проверить, что $\mathfrak{B}$ является наследственной насыщенной формацией. Кроме того, все силовские подгруппы в группах из $\mathfrak{B}$ элементарные абелевы, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

Лемма 2. $MS(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F} \cup \mathfrak{B}$ *для любого класса групп* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. В группе G для любого простого делителя p ее порядка по теореме Силова найдется подгруппа P простого порядка p. Возьмем для нее минимальное добавление H. Возможны следующие ситуации:

(а) если $P \leq H$, то $G = PH = H \in \mathfrak{F}$;

(в) если $P \cap H = 1$, то H будет уже дополнением к P в группе G. Перебором всех простых делителей порядка группы G мы получим, что все подгруппы простых порядков в группе G дополняемы. Следовательно, по лемме 2 получаем, что группа G вполне факторизуема. Лемма доказана.

Для классических формаций верен следующий результат.

Лемма 3 (теорема, [3]). *Справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{D}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$, *то* $MS_1(\mathfrak{F}) = MS(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$;

(2) если $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}, \mathfrak{A}\}$, *то либо* $G \in \mathfrak{F}$ *либо* G *изоморфна полупрямому произведению двух циклических подгрупп различных простых порядков.*

Множество минимальных добавлений к подгруппе A в группе G обозначим через $ms_G(A)$.

Лемма 4 (лемма 4, [2]). *Пусть A подгруппа группы* G *и* $x \in G$. *Тогда*

(1) $ms_G(A) = ms_G(A^x)$;

(2) если $B \in ms_G(A)$, *то* $B^x \in ms_G(A)$;

(3) если $B \in ms_G(A)$, *то* $BN/N \in ms_{G/N}(A/N)$ *для всех подгрупп* $N \lhd G$, $N \subseteq A$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс групп. Если группа* $G \in MS_1(\mathfrak{F}) \setminus MS(\mathfrak{F})$ *и* H *не* $\mathfrak{F}$*-добавляемая подгруппа в группе* G, *то справедливы следующие утверждения:*

(1) подгруппа H *нормальна в группе* G;

(2) если $\mathfrak{F}$ *– гомоморф, то факторгруппа* $G/H \in MS(\mathfrak{F})$.

Доказательство. (1) Предположим, что $H^x \neq H$ для некоторого элемента $x \in G$. Тогда в группе G существует минимальное добавление K к подгруппе H^x, принадлежащее $\mathfrak{F}$, т.е. $G = H^xK$, $K \in \mathfrak{F}$ и $H^xK_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп K_1 из K. Из леммы 4(1) вытекает, что группа $G=HK$ и K – минимальное добавление к H. Так как $K \in \mathfrak{F}$, то получаем противоречие с выбором подгруппы H. Поэтому допущение неверно, и $H^x = H$ для всех $x \in G$, т.е. подгруппа H нормальна в группе G.

(2) Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Из пункта (1) леммы вытекает, что подгруппа H нормальна в группе G. Допустим противное, что в факторгруппе G/H есть не $\mathfrak{F}$-добавляемая подгруппа S/H. Тогда любое минимальное добавление K/H к подгруппе S/H не принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как K/H – минимальное добавление к подгруппе S/H, то G = KS. Ввиду того, что $S \neq H$, то в группе G существует минимальное добавление T к подгруппе S и $T \in \mathfrak{F}$. Из леммы 4(3) следует, что подгруппа TH/H является минимальным добавлением к подгруппе S/H. Так как $\mathfrak{F}$ – гомоморф и $T \in \mathfrak{F}$, то $TH/H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с предположением. Поэтому $G/H \in MS(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственный класс групп. Если группа* $G \in MS_1(\mathfrak{F}) \setminus MS(\mathfrak{F})$ *и* H *– не* $\mathfrak{F}$*-добавляемая подгруппа в* G, *то порядок* H *равен простому числу.*

Доказательство. Пусть простое число p делит порядок подгруппы H и P – подгруппа порядка p из H. Если P – собственная подгруппа в H, то найдется подгруппа S такая, что PS = G и $S \in \mathfrak{F}$. Теперь и HS = G. А так как класс $\mathfrak{F}$ наследственный, то некоторая подгруппа S_1 из S, являющаяся минимальным добавлением к подгруппе H в G, будет также принадлежать $\mathfrak{F}$. Пришли к противоречию с выбором подгруппы H. Значит P = H. Лемма доказана.

Напомним, что Φ(G) – подгруппа Фраттини группы G.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственный класс групп. Если группа* $G \in MS_1(\mathfrak{F}) \setminus MS(\mathfrak{F})$ *и* H *– не* $\mathfrak{F}$*-добавляемая подгруппа в* G, *то* $H \geq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Предположим, что $H \neq \Phi(G)$. Тогда $\Phi(G)$ обладает минимальным добавлением K в группе G таким, что $K \in \mathfrak{F}$. По свойствам подгруппы Фраттини из равенства $\Phi(G)K=G$ следует, что K = G. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Подгруппа H всегда имеет минимальное добавление L в группе G. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственный класс, то $L \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \in MS_1(\mathfrak{F}) \setminus MS(\mathfrak{F})$ и H не $\mathfrak{F}$–добавляемая подгруппа в группе G. Поэтому допущение неверно, и $H = \Phi(G)$. Итак, если $\Phi(G) \neq 1$, то $H = \Phi(G)$. Если $\Phi(G) = 1$, то ясно, что $\Phi(G) \leq H$. Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 вытекает, что для наследственного класса групп $\mathfrak{F}$ в группе $G \in MS_1(\mathfrak{F}) \setminus MS(\mathfrak{F})$ с неединичной подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ не $\mathfrak{F}$–добавляемой подгруппой является подгруппа $\Phi(G)$.

Запись G=[H]K означает, что группа G является полупрямым произведением нормальной подгруппы H и подгруппы K.

Доказательство теоремы. Пусть $\Phi(G)=1$. Тогда существует максимальная подгруппа K в группе G, не содержащая H. Так как по лемме 5(1) подгруппа $H \triangleleft G$, то G = [H]K. По лемме 5(2) факторгруппа $G/H \in MS(\mathfrak{F})$, а по лемме 2 подгруппа $K \in \mathfrak{F} \cup \mathfrak{B}$. Из выбора подгруппы H следует, что $K \notin \mathfrak{F}$, поэтому $K \in \mathfrak{B}$.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $H=\Phi(G)$ по предыдущему следствию и $G/H \in MS(\mathfrak{F})$ по лемме 5(2). По лемме 2 факторгруппа $G/H \in \mathfrak{F} \cup \mathfrak{B}$. Если $G/H \in \mathfrak{F}$, то из насыщенности класса $\mathfrak{F}$ следует, что сама группа $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственный класс, то $G \in MS(\mathfrak{F})$ – противоречие с выбором группы G. Поэтому $G/H \notin \mathfrak{F}$ и $G/H \in \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Доказательство следствия. Доказательство утверждения (1) вытекает из утверждений предыдущей теоремы и леммы 3.

Докажем утверждение (2). Так как группа $G \in MS_1(\mathfrak{N}) \setminus MS(\mathfrak{N})$, то существует не $\mathfrak{N}$–добавляемая подгруппа H в группе G. Тогда по лемме 5(2) факторгруппа $G/H \in MS(\mathfrak{N})$, но $G/H \notin \mathfrak{N}$, иначе в группе G нет не $\mathfrak{N}$–добавляемой подгруппы. Значит по лемме 3(5) $G/H \cong Z_r \times Z_q$, q | p-1.

Так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}$, то из сказанного выше вытекает утверждение (2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп // М., 1978. – 272 с.
2. ***Подгорная (Самусенко) В.В.*** О конечных группах с заданными минимальными добавлениями к подгруппам // Вопросы алгебры. Выпуск 13. Гомель, 1998. С. 177–182.
3. ***Горчаков Ю.М.*** Примитивно факторизуемые группы // ДАН СССР. 131, 1960. С. 1246–1248.
4. ***Черников С.Н.*** Группы с заданными свойствами системы подгрупп // М., 1980. – 384 с.

S U M M A R Y

All groups in this paper are considered finite. It is showed the structure of groups for which the such subgroup H exist, that any nonidentity not equal H subgroup, having minimal supplement, belonging to the class $\mathfrak{F}$.

Поступила в редакцию 1.12.2000