УДК 512.548

А.М. Гальмак

К определению класса $\mathfrak{X}^*(n)$

Согласно теореме Поста о смежных классах [1], всякой n-арной группе $< A, [\ ] >$ можно поставить в соответствие две группы: универсальную обёртывающую группу A^* и соответствующую группу A_0. Фиксируя класс групп $\mathfrak{X}$ и рассматривая только те n-арные группы, у которых соответствующая группа принадлежит этому классу, мы приходим к определению класса n-арных групп

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\ ] > \mid A_0 \in \mathfrak{X}\}.$$

Изучению классов $\mathfrak{X}(n)$ посвящены работы автора [2, 3].

Если в определении класса $\mathfrak{X}(n)$ группу A_0 заменить на группу A^*, то получим определение ещё одного класса n-арных групп, для обозначения которого будем использовать символ $\mathfrak{X}^*(n)$. Значение классов $\mathfrak{X}(n)$ и $\mathfrak{X}^*(n)$ в теории n-арных групп определяется тем, что многие известные классы n-арных групп совпадают либо с классом $\mathfrak{X}(n)$, либо с классом $\mathfrak{X}^*(n)$ для некоторого класса групп $\mathfrak{X}$, а также тем, что многие свойства, общие для групп и n-арных групп $(n \geq 3)$, переносятся с классов $\mathfrak{X}$ на классы $\mathfrak{X}(n)$ и $\mathfrak{X}^*(n)$.

В данной работе под классом n-арных групп $(n \geq 2)$ всегда понимается абстрактный класс n-арных групп.

1. Определение. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то для любого $n \geq 3$ обозначим через $\mathfrak{X}^*(n)$ совокупность всех n-арных групп $< A, [\ ] >$ таких, что универсальная обёртывающая группа Поста A^* принадлежит $\mathfrak{X}$, т.е.

$$\mathfrak{X}^*(n) = \{< A, [\ ] > \mid A^* \in \mathfrak{X}\}.$$

Легко проверяется, что совокупность $\mathfrak{X}^*(n)$ вместе со всякой n-арной группой содержит и все её изоморфные копии, т.е. является классом.

2. Пример. Пост установил [1], что n-арная группа $< A, [\ ] >$ является абелевой тогда и только тогда, когда её универсальная обёртывающая группа A^* абелева. Поэтому класс всех абелевых n-арных групп совпадает с классом $\mathfrak{A}^*(n)$, где $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп.

3. Пример. Пусть (Z_{n-1}) – класс групп, содержащий все изоморфные копии циклической группы порядка $n-1$, $\mathfrak{E}_n$ – класс всех одноэлементных n-арных групп.

Так как $A^* \simeq Z_{n-1}$ для любой n-арной группы $< A, [\ ] > \in \mathfrak{E}_n$, то $\mathfrak{E}_n \subseteq (Z_{n-1})^*(n)$.

Если теперь $< A, [\ ] > \in (Z_{n-1})^*(n)$, то $A^* \in (Z_{n-1})$, т.е. $|A^*| = n - 1$. Так как $|A^*| = (n-1)|A|$, то $|A| = 1$, откуда $< A, [\ ] > \in \mathfrak{E}_n$, и значит $(Z_{n-1})^*(n) \subseteq \mathfrak{E}_n$. Таким образом, доказано равенство $(Z_{n-1})^*(n) = \mathfrak{E}_n$.

4. Предложение. Пусть π – подмножество множества всех простых чисел, $\mathfrak{G}_\pi$ – множество всех конечных π-групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) класс всех конечных n-арных π-групп совпадает с $\mathfrak{G}_\pi(n)$;

2) $\mathfrak{G}_\pi^*(n) \subseteq \mathfrak{G}_\pi(n)$;

3) если $n - 1$ – π-число, то $\mathfrak{G}_\pi^*(n) = \mathfrak{G}_\pi(n)$;

4) если $n - 1$ не является π-числом, то $\mathfrak{G}_\pi^*(n) = \varnothing$;

5) если $n - 1 = p \in \pi$, то $\mathfrak{G}_\pi^*(p + 1) = \mathfrak{G}_\pi(p + 1)$;

6) если $n - 1 = p \notin \pi$, то $\mathfrak{G}_\pi^*(p + 1) = \varnothing$.

Доказательство. 1) Пример 9 [3].

2) Предположим, что существует n-арная группа $< B, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi^*(n)$, порядок которой не является π-числом, т.е. $< B, [\,] > \notin \mathfrak{G}_\pi(n)$. Так как

$$|B^*| = (n - 1)|B_o| = (n - 1)|B|,$$

то π-числом не является и порядок группы B^*, что невозможно, ввиду предположения $< B, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi^*(n)$. Следовательно, $< B, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi(n)$, и значит $\mathfrak{G}_\pi^*(n) \subseteq \mathfrak{G}_\pi(n)$.

3) Если $< A, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi(n)$, т.е. порядок A является π-числом, то π-числом является и порядок группы A^*:

$$|A^*| = (n - 1)|A_o| = (n - 1)|A|.$$

Следовательно, $< A, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi^*(n)$, и доказано включение $\mathfrak{G}_\pi(n) \subseteq \mathfrak{G}_\pi^*(n)$, а значит и равенство $\mathfrak{G}_\pi(n) = \mathfrak{G}_\pi^*(n)$.

4) Если $< A, [\,] > \in \mathfrak{G}_\pi^*(n)$, то $A^* \in \mathfrak{G}_\pi$, а так как

$$|A^*| = (n - 1)|A|,$$

то $n - 1$ – π-число, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{G}_\pi^*(n) = \varnothing$.

5) Следует из 3).

6) Следует из 4). Предложение доказано.

Справедливость следующего предложения устанавливается непосредственной проверкой.

5. Предложение. Справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{X}_1^*(n) \cup \mathfrak{X}_2^*(n) = (\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2)^*(n)$;

2) $\mathfrak{X}_1^*(n) \cap \mathfrak{X}_2^*(n) = (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2)^*(n)$;

3) если $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$, то $\mathfrak{X}_1^*(n) \subseteq \mathfrak{X}_2^*(n)$.

Обратное утверждение к утверждению 3) предыдущего предложения в общем случае неверно. Это следует, например, из утверждения 6) предложения 4, согласно которому $\mathfrak{G}_\pi^*(p + 1) = \varnothing$ для фиксированного простого p и любого множества π простых чисел такого, что $p \notin \pi$. Ясно, что таких множеств бесконечно много, в том числе, и не имеющих общих элементов.

6. Следствие. Пусть $\mathfrak{X} = + \bigcup\limits_{p \in \pi} (Z_p)$, где π – конечное подмножество множества всех простых чисел. Тогда $\mathfrak{X}^*(p + 1) = \mathfrak{E}_{p+1}$ для любого $p \in \pi$.

Доказательство. Согласно 1) предложения 1.5,

$$\mathfrak{X}^*(p + 1) = (\bigcup_{p \in \pi} (Z_p))^*(p + 1) = (Z_p \cup (\bigcup_{q \in \pi \setminus \{p\}} Z_q))^*(p + 1) =$$

$$= Z_p^*(p + 1) \cup (\bigcup_{q \in \pi \setminus \{p\}} Z_q^*(p + 1)),$$

т.е.

$$\mathfrak{X}^*(p+1) = Z_p^*(p+1) \cup \Big(\bigcup_{q \in \pi \setminus \{p\}} Z_q^*(p+1) \Big) \qquad (*)$$

Если $< A, [\,] > \in Z_q^*(p+1)$, то $A^* \simeq Z_q$, откуда и из $|A^*| = p|A|$ следует $p|A| = q$. Последнее равенство возможно только при $p = q$, $|A| = 1$, что противоречит условию $p \neq q$. Следовательно, $Z_q^*(p+1) = \varnothing$ для $p \neq q$, откуда и из $(*)$, учитывая $Z_p^*(p+1) = \mathfrak{C}_{p+1}$ (пример 3), получаем $\mathfrak{X}^*(p+1) = \mathfrak{C}_{p+1}$. Следствие доказано.

7. Пример. Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_k$ – различные конечные множества простых чисел, каждое из которых содержит фиксированное простое число p. Положим также $\mathfrak{X}_i = \bigcup_{p \in \pi_i} (Z_p)$. Тогда, согласно предыдущему следствию, $\mathfrak{X}_i^*(p+1) = \mathfrak{C}_{p+1}$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Это означает, что различные классы групп $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k$ определяют один и тот же класс n-арных групп $\mathfrak{X}_1^*(n) = \ldots = \mathfrak{X}_k^*(n)$.

8. Определение. Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ обозначим через $\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X})$ совокупность всех групп из $\mathfrak{X}$, каждая из которых является расширением некоторой группы с помощью циклической группы порядка k. Положим также

$$\overline{\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X})} = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X}),$$

т.е. $\overline{\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X})}$ – совокупность всех групп из $\mathfrak{X}$, каждая из которых не является расширением некоторой группы с помощью циклической группы порядка k.

В частности, $\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{G})$ (соответственно $\overline{\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{G})}$) – совокупность всех групп, каждая из которых является (соответственно не является) расширением некоторой группы с помощью циклической группы порядка k.

Ясно, что если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X})$ и $\overline{\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X})}$ – классы n-арных групп.

Ясно также, что $\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Z}_k(\mathfrak{G})$, $\overline{\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{X})} = \mathfrak{X} \cap \overline{\mathfrak{Z}_k(\mathfrak{G})}$.

9. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ классы групп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathfrak{Y} \subseteq \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{G})}$, то $\mathfrak{Y}^*(n) = \varnothing$ и $\mathfrak{X}^*(n) = (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})^*(n)$;

2) если $\mathfrak{Y} \subseteq \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})}$, то $\mathfrak{X}^*(n) = (\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y})^*(n)$;

3) $\mathfrak{X}^*(n) = (\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}))^*(n)$, причём $\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})$ – минимальный класс с таким свойством, т.е. $\mathfrak{Y}^*(n) \subset \mathfrak{X}^*(n)$ для любого $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})$;

4) $\mathfrak{G}^*(n) = (\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{G}))^*(n)$, причём $\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{G})$ – минимальный класс с таким свойством.

Доказательство. 1) Предположим, что $< A, [\,] > \in Y^*(n)$.

Тогда $\mathfrak{Y}$ содержит группу A^*, имеющую инвариантную подгруппу A_0, факторгруппа A^*/A_0 по которой является циклической и имеет порядок $n-1$. А так как $\mathfrak{Y} \subseteq \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{G})}$, то это невозможно. Следовательно $\mathfrak{Y}^*(n) = \varnothing$.

Применяя теперь предложение 5 получим

$$(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})^*(n) = \mathfrak{X}^*(n) \cup \mathfrak{Y}^*(n) = \mathfrak{X}^*(n) \cup \varnothing = \mathfrak{X}^*(n),$$

т.е. $\mathfrak{X}^*(n) = (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})^*(n)$.

2) Так как $\mathfrak{Y} \subseteq \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})} \subseteq \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{G})}$, то применяя 1), получим

$$\mathfrak{X}^*(n) = ((\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y}) \cup \mathfrak{Y})^*(n) = (\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y})^*(n),$$

т.е. $\mathfrak{X}^*(n) = (\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y})^*(n)$.

3) Требуемое равенство следует из 2) при $\mathfrak{Y} = \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})}$ с учётом $\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}) \cup \overline{\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})}$.

Если $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X})$, то существует группа A такая, что

$$A \in \mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}), \qquad (*)$$

$$A \notin \mathfrak{Y}. \qquad (**)$$

Из (*) следует, что в A существует инвариантная подгруппа B такая, что факторгруппа A/B – циклическая группа порядка n – 1. Тогда по обратной теореме Поста, смежный класс aB, порождающий группу A/B, является n-арной группой с n-арной операцией [ ], производной от операции в группе A. Кроме того, $(aB)^* \simeq A$. Тогда из (*) и (**) следует

$$(aB)^* \in \mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}),\ (aB)^* \notin \mathfrak{Y},$$

откуда

$$< aB, [\,] > \in (\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}))^*(n),\ < aB, [\,] > \notin \mathfrak{Y}^*(n).$$

т.е. $\mathfrak{Y}^*(n) \neq (\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}))^*(n)$. А так как по предложению 5,

$$\mathfrak{Y}^*(n) \subseteq (\mathfrak{Z}_{n-1}(\mathfrak{X}))^*(n) = \mathfrak{X}^*(n),$$

то $\mathfrak{Y}^*(n) \subset \mathfrak{X}^*(n)$.

4) Следует из 3) при $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$. Теорема доказана.

10. Замечание. Как уже отмечалось (пример 2), n-арная группа < A, [ ] > является абелевой тогда и только тогда, когда $A^* \in \mathfrak{A}$. Пост установил также [1], что n-арная группа < A, [ ] > является полуабелевой тогда и только тогда, когда $A_0 \in \mathfrak{A}$. Имея в виду приведенные критерии Поста, будем пользоваться следующей терминологией.

Если для обозначения групп из класса $\mathfrak{X}$ употребляется некоторый термин, то этим же термином будем обозначать n-арные группы из класса $\mathfrak{X}^*(n)$. Тот же термин, но с приставкой «полу» будем употреблять для групп из класса $\mathfrak{X}(n)$. Таким образом, каждому известному классу групп ставится в соответствие два его n-арных аналога. Например, как в следующем определении.

11. Определение. n-Арная группа < A, [ ] > называется разрешимой (полуразрешимой), если группа A^* (группа A_0) разрешима.

Ясно, что класс всех разрешимых (полуразрешимых) n-арных групп совпадает с классом $\mathfrak{S}^*(n)$ (классом $\mathfrak{S}(n)$), где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп.

Аналогично определяются нильпотентные (полунильпотентные), сверхразрешимые (полусверхразрешимые) n-арные группы, а также другие n-арные аналоги известных классов групп.

12. Предложение. Справедливы следующие утверждения:

1) если класс групп $\mathfrak{X}$ вместе со всякой группой содержит и любую её нормальную подгруппу, факторгруппа по которой циклическая порядка n – 1, то $\mathfrak{X}^*(n) \subseteq \mathfrak{X}(n)$;

2) если класс групп $\mathfrak{X}$ вместе со всякой группой содержит и любое её расширение с помощью циклической группы порядка n – 1, то $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{X}^*(n)$;

3) если класс групп $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям, сформулированным в 1) и 2), то $\mathfrak{X}^*(n) = \mathfrak{X}(n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}^*(n)$, то $A^* \in \mathfrak{X}$, а так как A_0 – инвариантная подгруппа в A^*, факторгруппа по которой циклическая порядка n – 1, то по условию, $A_0 \in \mathfrak{X}$, откуда $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$. Следовательно, $\mathfrak{X}^*(n) \in \mathfrak{X}(n)$.

2) Если $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$, то $A_0 \in \mathfrak{X}$, а так как A^* – расширение группы A_0 с помощью циклической группы порядка n – 1, то по условию, $A^* \in \mathfrak{X}$, откуда $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}^*(n)$. Следовательно, $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{X}^*(n)$.

3) Следует из 1) и 2). Предложение доказано.

13 Следствие. Равенство $\mathfrak{X}^*(n) = \mathfrak{X}(n)$ верно, если $\mathfrak{X}$ – любой из следующих классов: 1) всех групп; 2) всех конечных групп; 3) всех периодических групп; 4) всех локально конечных групп; 5) всех групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп; 6) всех групп, удовлетворяющих условию максимальности для подгрупп; 7) всех минимаксных групп; 8) всех групп конечного ранга; 9) всех черниковских групп; 10) всех полициклических групп; 11) всех конечных π-разрешимых групп; 12) всех (конечных) разрешимых групп.

Как видно из следствия 13, для многих классов групп $\mathfrak{X}$, их n-арные аналоги $\mathfrak{X}(n)$ и $\mathfrak{X}^*(n)$ при любом $n \geq 3$ совпадают. Поэтому, например, понятия периодичности и полупериодичности n-арных групп тождественны. Точно также, тождественны понятия разрешимости и полуразрешимости n-арных групп.

Для некоторых классов групп $\mathfrak{X}$ имеет место строгое включение $\mathfrak{X}^*(n) \subset \mathfrak{X}(n)$.

14. Пример. Если на симметрической группе S_3 определить тернарную операцию $[\alpha\beta\gamma] = \alpha\beta\gamma$, то множество B_3 всех нечётных подстановок из S_3 вместе с тернарной операцией [ ] превращается в тернарную группу, причём

$$(B_3)^* \simeq S_3\,,\ (B_3)_o \simeq A_3\,.$$

Так как S_3 – ненильпотентна, а A_3 – циклическая, то из

$$S_3 \notin N,\ A_3 \in \mathfrak{Z}$$

следуют строгие включения

$$\mathfrak{Z}^*(3) \subset \mathfrak{Z}(3),\ \mathfrak{A}^*(3) \subset \mathfrak{A}(3),\ N^*(3) \subset N(3).$$

Можно показать, что

$$\mathfrak{Z}^*(n) \subset \mathfrak{Z}(n),\ \mathfrak{A}^*(n) \subset \mathfrak{A}(n),\ N^*(n) \subset N(n)$$

для любого $n \geq 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N2. P.208-350.
2. ***Гальмак А.М.*** Многообразие $\mathfrak{X}(n)$ // Веснік ВДУ, 2000, № 2. С. 74-78.
3. ***Гальмак А.М.*** К определению класса $\mathfrak{X}(n)$ // Веснік ВДУ, 2000, № 1. С. 74-78.

SUMMARY

In this paper the klass of n-ary groups of the $\mathfrak{X}^*(n)$ form are defined and considered, where $\mathfrak{X}$ is klass of groups.

Поступила в редакцию 10.01.2001

УДК 512.542

С.Л. Максимов

Холлова характеризация конечных групп подгруппами Шмидта фиксированных рангов

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $E = G_0 \leq \ldots \leq G_s = G$ – главный ряд группы G. Тогда разрешимые главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Если G – неединичная раз-