УДК 512.542

Н.Т. Воробьев, В.Н. Загурский

О новых локальных заданиях классов Фиттинга

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга был предложен Хартли [1]. Идея локализации Хартли состоит в изучении классов групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (локальными H-функциями или функциями Хартли) множества P всех простых чисел во множества классов Фиттинга. При этом класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется локальным [2], если существует H-функция f такая, что $\mathfrak{F}=LR(f)$, где $LR(f)=\mathfrak{E}_{\pi}\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$ и $\pi=Supp(f)=\{p\in P|\ f(p)\neq\varnothing\}$.

Естественное расширение понятия локального класса Фиттинга возможно в смысле следующего определения.

Определение. Отображение множества P всех простых чисел во множество классов групп назовем квазилокальной H-функцией или H_Q-функцией. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем квазилокальным, если существует H_Q-функция f такая, что $\mathfrak{F}=LR_Q(f)$, где $LR_Q(f)=\mathfrak{E}_{\pi}\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$ и $\pi=Supp(f)=\{p\in P|\ f(p)\neq\varnothing\}$.

Очевидно, что всякий локальный класс Фиттинга является квазилокальным, хотя обратное в общем случае неверно.

Пусть Ω – множество всех H_Q-функций квазилокального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то есть $\Omega=\{f_i|\ i\in I$ и $LR_Q(f_i)=\mathfrak{F}\}$. Определим на этом множестве отношение порядка $<$ следующим образом: $f\leq h$ тогда и только тогда, когда $f(p)\subset h(p)$ для любого простого $p(f,\ h\in\Omega)$. При этом H_Q-функцию f из Ω назовем минимальной для класса $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества Ω. Если же f является максимальным элементом множества Ω, то назовем f максимальной H_Q-функцией класса $\mathfrak{F}$.

Возникает общая задача описания минимальных и максимальных H_Q-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В настоящей работе эта задача решается для случая минимальных нормально-наследственных H_Q-функций. Кроме того, описываются также максимальные H_Q-функции для класса Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех π – нильпотентных групп.

Рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [3]. Основные результаты работы анонсированы [4].

Лемма 1 [3]. *Если группа N субнормальна в группе G и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $N_\mathfrak{F}=N\cap G_\mathfrak{F}$.*

Минимальную нормально-наследственную H_Q-функцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ описывает следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}=LR_Q(\varphi)$ для некоторой нормально-наследственной квазилокальной H-функции φ и $\pi=Supp(\varphi)$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственной минимальной нормально-наследственной квазилокальной H-функцией f_0 такой, что*

$$f_0(p)=\begin{cases} s_n(G\in\mathfrak{F}\,|\,G\doteq X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}\ (X\in\mathfrak{X})), & \text{если } p\in\pi.\\ \varnothing, & \text{если } p\in\pi' \end{cases}$$

Доказательство. Вначале докажем, что существует единственная минимальная H_Q-функция. Пусть Ω – множество всех нормально-наследственных квазилокальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Обозначим через f пересечение всех элементов из множества Ω. Возьмем класс групп $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{E}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$, где $\pi=Supp(\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}$. Обозначим через f_i,

где $i\in I$ любую нормально-наследственную H_Q-функцию, которой обладает класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{F}=\mathfrak{E}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi} f_i(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$.

Покажем, что $\mathfrak{F}^*\subseteq\mathfrak{F}$.

Пусть $G\in\mathfrak{F}^*$. Тогда $G\in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого простого p из множества π и поэтому в G существует нормальная подгруппа N такая, что $N\in f(p)$ и $G/N\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Так как $N\in f(p)$ и $f(p)=\cap_{i\in I}f_i(p)$, то $N\in f_i(p)$. Следовательно, $G\in f_i(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p\in\pi$. Отсюда вытекает, что $G\in\bigcap_{p\in\pi} f_i(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда $G\in\mathfrak{E}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi} f_i(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})=\mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F}^*\subset\mathfrak{F}$.

Докажем включение $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}^*$. Пусть $G\in\mathfrak{F}$. Тогда $G\in\mathfrak{E}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi} f_i(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$ и

$G\in f_i(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для каждого $p\in\pi$. Тогда в G существует нормальная подгруппа N_i, причем $N_i\in f_i(p)$ и $G/N_i\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Пусть $N=\cap_{i\in I}N_i$. Так как $N_i\in f_i(p)$ и $f_i(p)$ – нормально-наследственный класс групп, то $N\in f(p)$. Но класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ является формацией и $G/N_i\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Значит $G/N\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Далее по определению произведения классов групп следует, что $G\in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого p из π и поэтому

$G\in\mathfrak{E}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})=\mathfrak{F}^*$. Итак, $G\in\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}^*$. Следовательно, $\mathfrak{F}=LR_Q(f)$.

Возьмем теперь произвольную нормально-наследственную H_Q-функцию g из Ω и докажем, что $f(p)\subseteq g(p)$ для любого простого p. Пусть $G\in f(p)$. Так как $f(p)=\cap_{i\in I}f_i(p)$, то $G\in f_i(p)$ для каждого $i\in I$ и поэтому $g=f_{i_0}$ для некоторого $i_0\in I$. Тогда $G\in g(p)$. Отсюда заключаем, что $f\leq g$.

Пусть f минимальная нормально-наследственная H_Q-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и f_0 такая квазилокальная H_Q-функция, что

$$f_0(p) = \begin{cases} s_n(G \in \mathfrak{X} \mid G \simeq X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} (X \in \mathfrak{F})), \text{ если } p \in \pi. \\ \varnothing, \text{если } p \in \pi' \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$. Пусть класс групп $x(p) = (G \in \mathfrak{F} \mid G \simeq X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} (X \in \mathfrak{F}))$. Докажем, что $x(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p из π. Возьмем группу $G \in x(p)$. Тогда по определению функции x существует группа $X \in \mathfrak{F}$ такая, что $G \simeq X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$. Так как $X \in \mathfrak{F}$, то $X \in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, существует нормальная подгруппа M группы X такая, что $M \in f(p)$ и $X/M \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Итак, $X/M \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и, значит, $X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \subseteq M$. Но $X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \triangleleft M$ и $M \in f(p)$. Отсюда ввиду того, что $f(p)=S_nf(p)$ вытекает $X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \in f(p)$. Ввиду изоморфизма $G \simeq X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$ имеем $G \in f(p)$. Следовательно, $f(p) \subseteq g(p)$ для любого простого p из π. Следовательно, $f_0(p)=S_nx(p) \subset S_nf(p)=f(p)$ и $LR_Q(f_0)$ является подклассом класса $\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $\mathfrak{F} \subseteq LR_Q(f_0)$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \simeq G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$. По определению функции f_0 получаем $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \in x(p) \subset f_0(p)$. Далее $G/G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \triangleleft G$, причем $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}} \in f_0(p)$. Следовательно, $G \in f_0(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого простого p из π. Итак, $G \in \mathfrak{E}_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} f_0(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} f_0(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$. Тогда $\mathfrak{F}=LR_Q(f_0)$ и $f_0=f$ минимальная из нормально-наследственных H_Q-функций класса $\mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

Опишем теперь максимальную из нормально-наследственных, D_0-замкнутых H_Q-функций для класса $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{N}_\pi=LR_Q(f)$ для некоторой H_Q –функции f и π=Supp(f). Причем $f(p)=S_nf(p)$ и $f(p)=D_0f(p)$ для всех p из π. Тогда справедливо следующее утверждение: $f(p) \cap \mathfrak{N}_\pi \subset \mathfrak{N}_p$ для всех p из π.*

Доказательство. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in (f(p) \cap \mathfrak{N}_\pi) \setminus \mathfrak{N}_p$ для некоторого p из π. Пусть U произвольная собственная подгруппа из G. Так как G – нильпотентная π-группа и класс f(p) – нормально-наследственный, то $U \in f(p)$ и $U \in \mathfrak{N}_\pi$. Следовательно, $U \in f(p) \cap \mathfrak{N}_\pi$ и, ввиду выбора G, $U \in \mathfrak{N}_p$. Итак, произвольная подгруппа U из G принадлежит $\mathfrak{N}_p$.

Так как G нильпотентная группа, то она представляется в виде прямого произведения своих силовских r-подгрупп $G = U_1 \times \ldots \times U_s$, причем $U_1 \in \mathfrak{N}_p, \ldots, U_s \in \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_p$. Получили противоречие с выбором G. Значит в G нет собственных подгрупп кроме единичной, т.е. G – простая группа. Поэтому $G \cong Z_q$, где $q \in \pi \subset \mathbb{P}$ и $q \neq p$.

Далее положим $X = Z_q \wr Z_p = (Z_q \times \ldots \times Z_q) \rtimes Z_p$, где $X^* = Z_q \times \ldots \times Z_q$.

Так как Z_p – силовская p-подгруппа группы X и Z_p не является нормальной подгруппой в X, то $X \notin \mathfrak{N}$.

Из свойств полупрямого произведения следует, что $X/X^* \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$. Но $G \cong Z_q$ и класс f(p) D_0 – замкнут, поэтому $X^* \in f(p)$. Тогда по определению произведения классов групп, получим $X \in f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Так как $X/X^* \in \mathfrak{N}_p$ и $X^* = X_{\mathfrak{N}_q}$, то $X \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Но $p \neq q$ и $\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'}$ – формация, следовательно, $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'} \subset f(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'}$. Итак, $X \in f(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'}$.

Возьмем простое число r из π, причем $r \neq p$ и $r \neq q$. Далее $|X| = q^p \cdot p$ и тогда $X \in \mathfrak{E}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{E}_{r'} \subseteq \mathfrak{N}_r\mathfrak{E}_{r'} \subseteq f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{E}_{r'}$. Следовательно, $X \in f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{E}_{r'}$ для любого r из π, причем $r \neq p$ и $r \neq q$. Таким образом,

$$X \in (f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \cap f(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'} \bigcap_{\substack{r \neq p,q \\ r \in \pi}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{E}_{r'}) \cap \mathfrak{E}_\pi = LR_Q(f) = \mathfrak{N}_\pi .$$

Получили противоречие с тем, что $X \notin \mathfrak{N}$. Это завершает доказательство того, что $f(p) \cap \mathfrak{N}_\pi \subset \mathfrak{N}_p$ для всех простых p из π.

Лемма доказана.

Теорема 2 *Класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп определяется H_Q-функцией x такой, что*

$$x(p) = \begin{cases} (G \mid G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p),\ \textbf{\textit{если}} & p \in \pi, \\ \varnothing, \textbf{\textit{если}} & p \in \pi' \end{cases}$$

При этом функция x является максимальной из нормально-наследственных, D_0-замкнутых H_Q-функций класса $\mathfrak{N}_\pi$ и для всех простых $p \in \pi$ справедливо равенство $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$.

Доказательство. Докажем вначале, что x(p) нормально-наследственный класс групп.

Очевидно, что $x(p) \subseteq S_n x(p)$. Пусть $G \in S_n x(p)$. Тогда существует группа $K \in x(p)$ такая, что $G \triangleleft K$. Далее $K_{\mathfrak{N}_\pi} \triangleleft K$ и $G_{\mathfrak{N}_\pi} \triangleleft G$. Так как группа G нормальна в группе K, то по лемме 1 получаем $K_{\mathfrak{N}_\pi} \cap G = G_{\mathfrak{N}_\pi}$. Тогда $G_{\mathfrak{N}_\pi} \subseteq K_{\mathfrak{N}_\pi}$. Но $K \in x(p)$ и поэтому $K_{\mathfrak{N}_\pi}$ является p-группой. Следовательно, $G_{\mathfrak{N}_\pi}$ является p-группой. Отсюда получаем, что $G \in x(p)$ и $S_n x(p) \subset x(p)$. Следовательно, класс x(p) является нормально-наследственным для любого p из π.

Докажем D_0-замкнутость класса x(p).

Очевидно, что $x(p) \subseteq D_0 x(p)$. Пусть группа $G \in D_0 x(p)$. Тогда в G существуют нормальные подгруппы G_i такие, что $G_i \in x(p)$, где $i = 1, \ldots, r$ и $G = G_1 \times \ldots \times G_r$. Покажем, что $G \in x(p)$. Так как $\mathfrak{N}_\pi$ – класс Локетта, то $G_{\mathfrak{N}_\pi} = (G_1)_{\mathfrak{N}_\pi} \times \ldots \times (G_r)_{\mathfrak{N}_\pi}$. Но $G_i \in x(p)$ и, следовательно, $(G_i)_{\mathfrak{N}_\pi}$ является p-группой для $i \in \{1, \ldots, r\}$. Значит $G_{\mathfrak{N}_\pi}$ p-группа. Тогда $G \in x(p)$ и $D_0 x(p) \subset x(p)$. Итак, класс x(p) D_0-замкнут для любого p из π.

Покажем теперь, что $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для любого p из π.

Очевидно, что $x(p) \subseteq x(p)\mathfrak{N}_p$. Пусть группа $G \in x(p)\mathfrak{N}_p$. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \in x(p)$, причем $G/K \in \mathfrak{N}_p$. Ввиду изоморфизма $G_{\mathfrak{N}_\pi}K/K \cong G_{\mathfrak{N}_\pi}/(G_{\mathfrak{N}_\pi} \cap K)$ и леммы 1 получаем $G_{\mathfrak{N}_\pi}K/K \cong G_{\mathfrak{N}_\pi}/K_{\mathfrak{N}_\pi}$. Но $G/K \in \mathfrak{N}_p$, и поэтому фактор $G_{\mathfrak{N}_\pi}K/K$ является p-группой. Следовательно, $G_{\mathfrak{N}_\pi}/K_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p$. Так как $K \in x(p)$, то $K_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p$. Тогда $G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p$ и $G \in x(p)$, что доказывает равенство $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для любого p из π.

Докажем, что x является максимальной из нормально-наследственных, D_0-замкнутых квазилокальных H-функцией класса $\mathfrak{N}_\pi$.

Пусть f – произвольная нормально-наследственная H_Q-функция, задающая класс $\mathfrak{N}_\pi$. Покажем, что $f(p) \subseteq x(p)$ для любого p из π. Пусть $G \in f(p)$. Так как f(p) нормально-наследственный класс групп, то $G_{\mathfrak{N}_\pi} \in f(p)$ и $G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_\pi$. Значит $G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_\pi \cap f(p)$. Но по лемме 2 $f(p) \cap \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{N}_p$, значит, $G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G \in x(p)$ и $f(p) \subseteq x(p)$ для любого p из π. Так как $f \leq x$, то $f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} \subseteq x(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого p из π. Итак, $\mathfrak{N}_\pi = (\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) \cap \mathfrak{E}_\pi \subseteq LR_Q(x)$.

Докажем включение $LR_Q(x) \subseteq \mathfrak{N}_\pi$.

Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in LR_Q(x) \setminus \mathfrak{N}_\pi$. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{N}_\pi}$. Так как $G \in x(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$, то существует нормальная подгруппа N в G такая, что $N \in x(p)$ и $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Так как подгруппа N нормальна в G, то по лемме 1 $G_{\mathfrak{N}_\pi} \cap N = N_{\mathfrak{N}_\pi}$. Ввиду того, что $G_{\mathfrak{N}_\pi}$ – единственная максимальная подгруппа в G, получим $G_{\mathfrak{N}_\pi} \cap N = N$. Итак, $N = N_{\mathfrak{N}_\pi}$. Но $N \in x(p)$, поэтому $N_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $N \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому $N < G_{\mathfrak{N}_p}$. Так как $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ – формация, то ввиду изоморфизма, $(G/N)/(G_{\mathfrak{N}_p}/N) \cong G/G_{\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для любого простого p из π. Отсюда вытекает, что $G \in \bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Кроме того $G \in \mathfrak{E}_\pi$. Итак, $G \in LR_Q(f) = \mathfrak{N}_\pi$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $\mathfrak{N}_\pi = LR_Q(x)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Класс Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп определяется H_Q-функцией x такой, что*

$$x(p) = (G \mid G_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}_p).$$

При этом функция x является максимальной из нормально-наследственных, D_0 -замкнутых H_Q-функций класса $\mathfrak{N}$ и для всех простых $p \in P$ справедливо равенство $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Hartley B.*** On Fisher's dualization of formation theory // Proc. London Math.Soc., 1969. Vol.3, №2. P.193-207.
2. ***Воробьев Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. ж., 1996. Т. 37, № 6. С.1296-1302.
3. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite solvable groups // Waltor de Gryeter. New York-Berlin, 1992. – 891 p.
4. ***Загурский В.Н, Воробьев Н.Т.*** О квазилокальных классах Фиттинга. //Межд. алгебраическая конференция посвященная памяти З.И. Боревича (17-23 сентября 2002 г.). С-Петербург. С. 26-27.

S U M M A R Y

In this paper the minimal Hartley functions and maximal Hartley functions of Fittingclasses are considered and researched.

Поступила в редакцию 30.11.2002