УДК 372.851

О.И. Мельников

Использование графов для обучения школьников понятиям «необходимые и достаточные условия»

Усвоение понятий «необходимые и достаточные условия» всегда вызывает трудности у школьников. Часто они не понимают взаимосвязей этих понятий, не чувствуют различия между ними, при доказательстве теорем не могут указать, какие условия необходимые, а какие – достаточные. Ни учителя, ни репетиторы, правда, в силу различных причин, часто не обращают внимания школьников на логические вопросы построения курса математики.

«Доказательства различных теорем учащимися в большинстве случаев заучиваются как нечто сказанное в книге, а потому подлежащее усвоению.

Связь между теоремами остается при этом невыясненной; представление о том, что совокупность теорем представляет собой некоторую систему, которая служит для изучения часто встречающихся математических объектов, часто отсутствует... Между тем вопросы, касающиеся методов математического доказательства, очень затрудняют студентов, особенно на первых курсах. При переходе к высшей математике студенты наталкиваются на определения и теоремы, которые представляют собой сложную комбинацию таких слов, как «необходимо и достаточно», «все», «любой», «некоторые», «существуют» и т.п., и усваиваются ими с трудом» [1]. Хотя эти слова написаны профессором И.С. Градштейном более шестидесяти лет назад, ситуация в этом вопросе не изменилась и в настоящее время. Теория графов предлагает большое число задач различной степени сложности, связанных с такими условиями. Можно рассматривать задачи, в которых условия являются необходимыми, но не достаточными, или достаточными, но не необходимыми, причем можно подвести ученика к тому, что он сам укажет, почему не выполняется то или иное условие. Случай же, когда выполняются и необходимые, и достаточные условия, тесно связан с понятием «эквивалентность» и, опять-таки, с трудными понятиями «прямая и обратная теоремы».

Наиболее удобной темой для первого знакомства с необходимостью и достаточностью является тема «Эйлеровы графы». Автор проводил занятия по этой теме в 7 классе, но считает, что оно было бы понятно и более младшим школьникам. Рассматривается задача построения замкнутого маршрута в графе, в котором каждое ребро содержится ровно один раз. Эта задача естественным путем получается из занимательной задачи об обходе островов и мостов, известной еще Эйлеру, в которой нужно выйти из некоторого места, пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться в исходное место. (Отметим, что с помощью темы «Эйлеровы графы» происходит и знакомство школьников с простейшими математическими моделями. Ученики отмечают соответствия объекта и построенной модели. В частности, участки суши соответствуют вершинам графа, мосты – ребрам, связность графа – возможности пройти от любого острова к любому другому, отсутствие висячих вершин – отсутствию островов, на которые ведет только один мост).

Вначале школьники находят очевидные условия, без выполнения которых задача не может быть решена. Такими условиями являются связность графа и отсутствие в нем висячих вершин, т.е. вершин, из которых выходит только одно ребро. Учитель должен подчеркнуть, что для решения задачи необходимо выполнение этих условий, что без выполнения их задача не может быть решена. После этого школьникам предлагается построить пример, когда названные условия выполняются, а нужного маршрута все равно нет, т.е. выполнение необходимого условия в этом случае не является достаточным для существования маршрута, поскольку необходимому условию могут удовлетворять и не эйлеровы графы. Такие примеры строятся легко. Обычно в этот момент кто-то из школьников догадывается, какое условие еще необходимо для решения задачи. Если этого не происходит, то можно нарисовать построенные примеры на доске и попытаться выяснить, почему требуемый обход невозможен. Ученики замечают, что в каждом из примеров в графе существуют вершины, из которых выходит нечетное число ребер (вершины нечетной степени), и именно такие вершины препятствуют решению. Следующий шаг – это переход от частных примеров к общему утверждению. Школьники самостоятельно или вместе с учителем доказывают легкую теорему: *если в графе существует эйлеров цикл, то степень каждой вершины графа четная*. Таким образом, находится еще одно необходимое условие: степени всех вершин графа должны быть четными.

Сразу же возникает вопрос: при выполнении двух предыдущих необходимых условий нужный маршрут тем не менее не существовал, возможно, что эта ситуация повторится и сейчас? После этого учитель доказывает, что это не так: выполнение последнего условия достаточно для существования маршрута, т.е. оно является необходимым и достаточным. Доказанную теорему теперь можно сформулировать в следующем виде: *для существования в связном графе эйлерова цикла необходимо и достаточно, чтобы степень каждой вершины графа была четной.*

Теперь учитель может подвести итоги и сделать вывод: «Если некоторое событие или факт никогда не может иметь место без определенного условия, то это условие является необходимым, если некоторое событие или факт обязательно имеет место при определенном условии, то это условие является достаточным» [2]. Затем в качестве иллюстраций следует привести примеры из жизни и математики.

При изучении темы «Гамильтоновы графы» доказывается теорема: *если степень каждой вершины графа не меньше чем n/2, где n – число вершин графа, то граф является гамильтоновым*, т.е. в нем существует замкнутый маршрут, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Учитель отмечает, что рассмотренное условие будет достаточным для существования такого маршрута. Возникает вопрос: всегда ли в гамильтоновых графах выполняется указанное условие? Школьники легко находят примеры, когда условие не выполняется, а граф, тем не менее, гамильтонов. Таким образом, изучая эйлеровы и гамильтоновы графы, можно без труда указать необходимые условия, которые не являются достаточными; достаточные условия, которые не являются необходимыми; и условия, которые одновременно будут необходимыми и достаточными. Кроме того, можно указать условия, которые не будут ни необходимыми, ни достаточными.

Часто ученики не понимают, что для опровержения какой-либо теоремы достаточно привести лишь один пример, когда утверждение не выполняется. Две предыдущие темы дают учителю хорошую возможность обратить внимание школьников на это. Чтобы условие не оказалось необходимым, нужно привести пример только одного эйлерова графа, для которого оно не выполняется, а чтобы условие не оказалось достаточным – пример только одного графа, для которого оно выполняется, а граф не гамильтонов.

Для некоторых тем можно предложить следующую схему изучения. Пусть T – некоторое подмножество множества G. Доказывается теорема о том, что любой элемент из T обладает некоторым свойством, т.е. данное свойство является необходимым для принадлежности элемента к множеству T. Затем задается вопрос: если элемент из G обладает указанным свойством, будет ли достаточно этого, чтобы он принадлежал T?

Рассмотрим пример. Определим дерево как связный граф без циклов. После этого докажем, что для любого дерева выполняется соотношение $m=n-1$, где m – число ребер графа, а n – число его вершин. Выполнение доказанного соотношения является необходимым для того, чтобы граф являлся деревом. Ставим перед школьниками следующий вопрос: если для некоторого графа выполняется соотношение $m=n-1$, то будет ли граф деревом, т.е. является ли приведенное соотношение достаточным условием? Ученики приводят нетрудные примеры, когда соотношение выполняется, но граф деревом не будет. Следующий вопрос: что нужно добавить к необходимому условию для того, чтобы оно превратилось в достаточное? Этот вопрос сложнее первого, и, возможно, школьники ответят на него с помощью учителя. Оказывается, необходимо добавить, что или граф будет связным, или в нем будут отсутствовать циклы. Одна из доказанных теорем будет выглядеть следующим образом: *для того, чтобы граф оказался деревом, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и число ребер в нем было на единицу меньше числа вершин*, вторая – *для того, чтобы граф оказался деревом, необходимо и достаточно, чтобы в нем не было циклов и число ребер было на единицу* *меньше числа вершин.* Этот пример хорош и тем, что показывает возможность существования нескольких необходимых и достаточных условий.

Сложные для школьников понятия «необходимые и достаточные условия» тесно связаны с не менее сложным понятием «эквивалентность». Возможно следующее определение эквивалентных высказываний. *Высказывание А эквивалентно (равносильно) высказыванию В, если при выполнении А выполняется В, а при выполнении В выполняется А.* Это определение фактически повторяет определение необходимых и достаточных условий. Поэтому приведенные в предыдущем абзаце теоремы можно переформулировать следующим образом: *для графа G, имеющего n вершин и m ребер, следующие утверждения эквивалентны: 1) G – дерево; 2) G – связный граф и $m = n-1$; 3) G – граф без циклов и $m = n - 1$.*

Ученики часто путают определения, свойства, признаки. Все это имеет тесную связь с необходимыми и достаточными условиями. Свойства объекта являются необходимыми условиями для существования этого объекта. Так, свойством дерева будет отмеченное ранее соотношение между числом его вершин и ребер. Признаком объекта являются достаточные условия, выполненные для объекта из более широкого класса объектов. Например, признаком дерева будет выполнение равенства $m=n-1$ для связного графа. Определение должно содержать необходимые признаки понятия, а всех этих признаков должно быть достаточно, чтобы охарактеризовать понятие. Так, в определение дерева входят два признака: во-первых, это – связный граф, во-вторых, это – граф без циклов. Следует указать, что определение не должно быть избыточным. Так, если включить в определение дерева условие $m = n-1$, то новому определению будут удовлетворять те же графы, что и предыдущему, поскольку это свойство вытекает из признаков, данных ранее.

Акцентировать внимание школьников на необходимых и достаточных условиях можно и при изучении других тем факультатива по теории графов. Например, при изучении планарных графов, т.е. таких графов, которые можно изобразить на плоскости так, чтобы их ребра не пересекались, доказывается *формула Эйлера*: $m < 3n-6$, где m – число ребер графа, а n – число вершин. В дальнейшем требуется доказать, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не будут планарными. (Граф K_5 – это граф с пятью вершинами, каждая пара из которых соединена ребром. Граф $K_{3,3}$ – граф, у которого шесть вершин, разбитых на два подмножества по три вершины, и девять ребер, соединяющих все пары вершин из разных подмножеств). Для первого графа формула Эйлера не выполняется, поэтому граф K_5 не является планарным. Для второго графа формула Эйлера выполняется. Следует пояснить ученикам, что из этого нельзя сделать определенного вывода о планарности графа, поскольку выполнение неравенства является необходимым условием для планарности, но не достаточным, т.е. условие может выполняться, а граф не быть планарным. Эта тема дает возможность школьникам самим предложить большой набор отдельно необходимых и отдельно достаточных условий.

Для формулировки необходимых и достаточных условий можно использовать и другие словесные конструкции. Так, теорема об эйлеровых графах, приведенная в начале статьи, может иметь такие формулировки: *связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная*, или *связный граф является эйлеровым, если и только если степень каждой его вершины четная*, или *связный граф является эйлеровым в том и только в том случае, когда степень каждой его вершины четная*. Полезно отметить, что отдельные части этих конструкций имеют конкретный смысл: слова «только тогда», «только в том случае», «только если» заменяют слова «необходимые условия», а слова «тогда», «в том случае», «если» – «достаточные условия».

Понятия «необходимые и достаточные условия» непосредственно связаны с понятиями «прямая и обратная теоремы». Действительно, прямую и обратную теоремы можно изобразить следующими схемами. Прямая теорема: *если некоторый элемент множества М обладает свойством α, то он обладает также и свойством β.* Обратная теорема: *если некоторый элемент множества М обладает свойством β, то он обладает и свойством α.* Следует отметить, что формулировка прямой теоремы – это фактически формулировка необходимого условия, а формулировка обратной теоремы – это формулировка достаточного условия. В случае справедливости прямой и обратной теорем их можно представить в виде одного предложения: *для того, чтобы элемент множества М обладал свойством α, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойством β.*

Учителю следует привести примеры эквивалентных формулировок. Например, утверждение: *любой двудольный граф содержит циклы только четной длины* – будет прямой теоремой, утверждение: *если любой цикл графа имеет четную длину, то этот граф будет двудольным* – обратной теоремой. Эти две теоремы эквивалентны третьей: *граф является двудольным тогда и только тогда, когда любой его цикл имеет четную длину.* (Граф называется *двудольным*, если его вершины можно так разбить на две части, что каждое ребро будет соединять вершины различных частей).

Деление на прямую и обратную теоремы, а значит, и на необходимые и достаточные условия, часто бывает условным. Это следует, в частности, из того, что в приведенной выше схеме можно поменять местами α и β. Обычно за прямую теорему принимается та, в которой устанавливаются свойства объекта, а за обратную та, в которой устанавливаются его признаки.

Ф.Ф. Нагибин [3] справедливо критикует логический подход к определению необходимых и достаточных условий [2, 4], как трудный для школьников, и предлагает теоретико-множественный. По мнению автора, учителя в своей работе должны разумно сочетать оба подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Градштейн И.С.*** Прямая и обратная теоремы. М., 1936.
2. ***Крельштейн Б.И.*** Необходимые и достаточные условия. М., 1961.
3. ***Нагибин Ф.Ф.*** Достаточные и необходимые условия // Математика в школе, 1972, № 3.
4. ***Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Нагибин Ф.Ф., Черкасов Р.С.*** Геометрия.
5. 6 класс. М., 1970.

SUMMARY

The author's experience of presenting the notions of «necessary and sufficient conditions», «direct and converse theorems», «equivalence», on the optional course of graph theory in secondary school is given.

Поступила в редакцию 13.12.2002