

S U M M A R Y

In this paper the normal soluble subgroups  $K$  of the finite group  $G$  with limited indices of maximal subgroups is described. It is proved that  $K \in N_2N_2U$ . From this result follows that  $\Phi_2^+(G) \in N_2N_2U$ ,  $n(\Phi_2^+(G)) \leq 4$ ,  $l_p(\Phi_2^+(G)) \leq 1$  for every prime  $p \geq 2$  and  $l_2(\Phi_2^+(G)) \leq 2$ .

Поступила в редакцию 15.03.2001

УДК 539.4

П.Ф. Коршиков, Г.И. Михасев

## Свободные радиально-симметричные колебания вязкоупругой кольцевой пластины, сопряженной со стержнем

В данной работе рассматривается простейшая механико-математическая модель среднего уха человека после хирургической реконструкции [1-2]. Исследуемая модель описывает так называемый стержневой протез [3-4], который устанавливается в среднем ухе так, что один конец стержня соединен с восстановленной мембраной, а второй – с основанием стремени. Модель, описывающая колебания кольцевой мембраны, сопряженной со стержнем, отражена в работе [5]. В новой модели учитывается как цилиндрическая жесткость, так и вязкоупругие свойства мембраны, так что последняя трактуется как вязкоупругая кольцевая пластинка, находящаяся под действием осевых растягивающих сил. В данной работе исследуются радиально-симметричные колебания пластины, при которых основание стремени совершает поступательное движение вдоль оси стержня.

Рассмотрим тонкую кольцевую радиально растянутую вязкоупругую пластинку, сопряженную со стержнем (рис.).

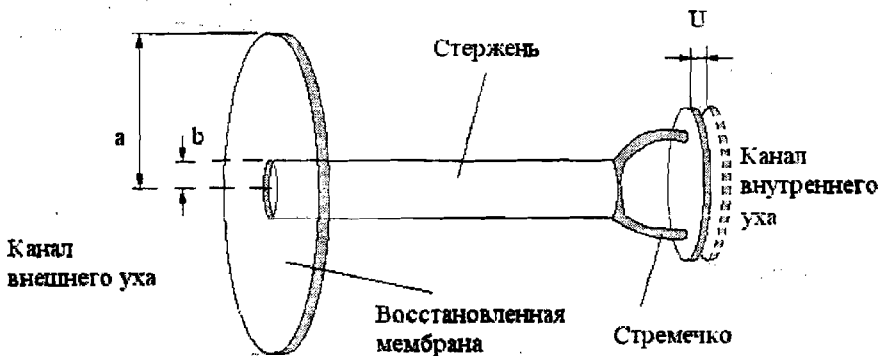


Рис. 1. Модель стержневого протеза

Будем исследовать свободные радиально-симметричные низкочастотные поперечные колебания пластины. В этом случае колебания пластины описываются интегродифференциальным уравнением

$$D\Delta^2 \left[ W(r, t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau)W(r, \tau)d\tau \right] + \tilde{T}\Delta W(r, t) + \rho \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

где  $W(r, t)$  – прогиб пластины,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\tilde{T}$  – сила растяжения,  $\rho$ ,  $R(t)$  – плотность и ядро скорости релаксации, соответственно.

В качестве граничных условий на внешнем и внутреннем контуре рассмотрим условия жесткого крепления

$$W(r, t)|_{r=a} = \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0, \quad W(r, t)|_{r=b} = U(t). \quad (2)$$

В случае жесткого крепления внутреннего контура уравнение движения присоединенного стержня запишется в виде

$$2\pi b D \left[ \frac{\partial}{\partial r} \Delta \left( W(r, t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau)W(r, \tau)d\tau \right) \right] \Big|_{r=b} + \tilde{\mu}U(t) + \tilde{m} \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{m}$  – масса стержня,  $U(t)$  – смещение стержня,  $\tilde{\mu}$  – коэффициент определяющий меру взаимодействия внутреннего уха и основания стремени [5]. Первое слагаемое в уравнении (3) представляет собой, с учетом релаксации напряжений, перерезывающие силы на внутреннем контуре пластины.

Решение уравнений (1), (3) будем искать в виде:

$$W(r, t) = w(r)e^{i\Omega t}, \quad U(t) = ue^{i\Omega t}, \quad (4)$$

где  $\Omega$  – искомая комплексная частота.

Подстановка (4) в (1) и (3), приводит к системе уравнений

$$\Delta^2 w(r) + T\Delta w(r) - k^2 w(r) = 0, \quad (5)$$

$$2\pi b [L_0 w(r)]_{r=b} + \mu u - m u \Omega^2 = 0, \quad (6)$$

$$T = \frac{\tilde{T}}{A(\Omega)}, \quad k^2 = \frac{\Omega^2 \rho}{A(\Omega)}, \quad \mu = \frac{\mu}{A(\Omega)}, \quad m = \frac{\Omega^2 \tilde{m}}{A(\Omega)},$$

$$A(\Omega) = D \left( 1 - \int_0^\infty R(t) e^{-i\Omega t} dt \right), \quad L_0 = \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Решение уравнения (5), с учетом граничных условий имеет вид:

$$w(r) = \frac{u}{H} [H_{31}J_0(\xi r) + H_{32}Y_0(\xi r) + H_{33}I_0(\zeta r) + H_{34}K_0(\zeta r)] \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
 H_{31} &= Y_0(\xi a)J_0(\zeta a)K_0'(\zeta b) + I_0(\zeta a)K_0'(\zeta a)Y_0'(\xi b) + K_0(\zeta a)J_0(\zeta b)Y_0'(\xi a) - \\
 &- Y_0(\xi a)K_0'(\zeta a)J_0(\zeta b) - I_0(\zeta a)K_0'(\zeta b)Y_0'(\xi a) - K_0(\zeta a)J_0(\zeta a)Y_0'(\xi b), \\
 H_{32} &= -J_0(\xi a)J_0(\zeta a)K_0'(\zeta b) - I_0(\zeta a)K_0'(\zeta a)J_0'(\xi b) - K_0(\zeta a)J_0(\zeta b)J_0'(\xi a) + \\
 &- J_0(\xi a)K_0'(\zeta a)J_0(\zeta b) + I_0(\zeta a)K_0'(\zeta b)J_0'(\xi a) - K_0(\zeta a)J_0(\zeta a)J_0'(\xi b), \\
 H_{33} &= J_0(\xi a)Y_0'(\xi a)K_0'(\zeta b) + Y_0(\xi a)K_0'(\zeta a)J_0'(\xi b) + K_0(\zeta a)Y_0'(\xi b)J_0'(\xi a) - \\
 &- J_0(\xi a)K_0'(\zeta a)Y_0'(\xi b) - Y_0(\xi a)K_0'(\zeta b)J_0'(\xi a) - K_0(\zeta a)Y_0'(\xi a)J_0'(\xi b), \\
 H_{34} &= -J_0(\xi a)Y_0'(\xi a)J_0(\zeta b) - Y_0(\xi a)J_0(\zeta a)J_0'(\xi b) - I_0(\zeta a)Y_0'(\xi b)J_0'(\xi a) + \\
 &+ J_0(\xi a)J_0(\zeta a)Y_0'(\xi b) + Y_0(\xi a)J_0(\zeta b)J_0'(\xi a) + I_0(\zeta a)Y_0'(\xi a)J_0'(\xi b)
 \end{aligned}$$

$|H|$  – определитель системы

$$\begin{cases}
 AJ_0(\xi a) + BY_0(\xi a) + CI_0(\zeta a) + DK_0(\xi a) = 0 \\
 AJ_0'(\xi a) + BY_0'(\xi a) + CI_0'(\zeta a) + DK_0'(\xi a) = 0 \\
 AJ_0(\xi b) + BY_0(\xi b) + CI_0(\zeta b) + DK_0(\xi b) = u \\
 AJ_0'(\xi b) + BY_0'(\xi b) + CI_0'(\zeta b) + DK_0'(\xi b) = 0
 \end{cases}$$

$J_0(\xi a)$ ,  $Y_0(\xi a)$ ,  $I_0(\zeta b)$ ,  $K_0(\zeta a)$  – функции Бесселя нулевого порядка,

$$\xi = \sqrt{\frac{T + \sqrt{T^2 + 4k}}{2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{-T + \sqrt{T^2 + 4k}}{2}}$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), получим уравнение, относительно искомой частоты свободных колебаний модели:

$$\frac{2\pi b}{|H|} [L_0(H_{31}J_0(\xi r) + H_{32}Y_0(\xi r) + H_{33}I_0(\zeta r) + H_{34}K_0(\zeta r))]_{r=b} + \mu - m = 0. \quad (8)$$

С использованием формулы (8) исследована зависимость частот свободных колебаний от изменяемых параметров модели. При расчете собственных частот использовались следующие значения постоянных параметров модели:  $a=5 \cdot 10^{-3}$  м,  $b=2 \cdot 10^{-3}$  м,  $R=10^{-3}$  м. В качестве изменяемых параметров модели были рассмотрены масса стержня, внутренний радиус кольцевой пластинки, цилиндрическая жесткость пластинки. Полученные зависимости для первых восьми частот, соответствующих радиально-симметричным колебаниям, представлены в таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1

**Зависимость собственных частот  $\omega_1$  (Гц) от массы стержня при  $T=10^3$  Н/м,  $T_1=10^{-5}$  Н,  $E=0.33 \cdot 10^8$  Па,  $a=0.005$  м,  $b=0.0016$  м**

$m \cdot 10^{-5}$ , кг	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$
4.00	78.77	823.68	2259.36	4461.21	7329.35	10953.52	15303.36	20378.72
6.00	64.78	820.36	2256.52	4428.72	7326.88	10951.24	15301.16	20376.57
8.00	56.31	818.56	2255.18	4427.11	7326.12	10949.82	15299.78	20376.12
10.00	50.48	818.16	2254.71	4426.91	7325.01	10949.12	15299.21	20375.01
12.00	46.15	817.00	2253.76	4426.18	7324.60	10948.88	15298.78	20374.42

Таблица 2

Зависимость собственных частот  $\omega_i$  (Гц) от внутреннего радиуса кольцевой пластинки при  $T=10^3$  Н/м,  $T_1=10^{-5}$  Н,  $E=0.33 \cdot 10^9$  Па,  $a=0.005$  м,  $m=0.00006$  м

$b \cdot 10^{-4}$ , кг	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$
0.80	59.35	676.17	1858.72	3651.02	6043.96	9037.44	12630.98	16824.39
1.20	61.81	724.12	1945.73	3875.34	6323.86	9425.16	13454.45	18320.56
1.60	64.78	820.36	2256.52	4428.72	7326.88	10951.24	15301.16	20376.57
2.00	68.35	914.56	2487.34	4823.57	8147.23	11765.98	16745.63	22748.41
2.40	72.62	1015.68	2792.40	5416.12	9058.16	13225.16	18625.14	24165.74

Таблица 3

Зависимость собственных частот  $\omega_i$  (Гц) от цилиндрической жесткости кольцевой пластинки при  $T=10^3$  Н/м,  $T_1=10^{-5}$  Н,  $a=0.005$  м,  $m=0.00006$  м,  $b=0.0016$  м

$E$ , Па	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$
$3.3 \cdot 10^4$	41.12	231.85	347.14	481.84	637.12	817.14	1017.21	1235.14
$3.3 \cdot 10^5$	42.79	250.79	352.18	512.73	650.16	840.82	1057.83	12450.89
$3.3 \cdot 10^6$	43.16	314.85	429.87	617.45	823.56	1054.87	10345.74	15874.65
$3.3 \cdot 10^7$	64.78	820.36	2256.52	4428.72	7326.88	10951.24	15301.16	20376.57
$3.3 \cdot 10^8$	164.75	2542.51	6567.21	10942.1	21316.19	30171.18	46608.21	62195.67

Как и следовало ожидать, при увеличении массы протеза значение минимальной частоты уменьшается (см. табл. 1), но влияние массы не столь значительно, как в случае с моделью, рассмотренной в [5]. Из таблицы 3 следует, что жесткость пластины оказывает наибольшее влияние на частоты по сравнению с остальными изменяемыми параметрами. При увеличении жесткости пластины или внутреннего радиуса кольцевой пластинки наименьшая частота увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Михасев Г.И., Коршиков П.Ф., Ситников В.П.** К вопросу о возможности математического моделирования реконструированного среднего уха. Материалы VIII математической Белорусской конференции. М., 2000. С 145-146.
2. **Ситников В.П., Михасев Г.И.** Возможности математического моделирования среднего уха человека. Сборник докладов научно-практической конференции «Проблемы научно-инновационного развития Витебской области и пути их решения». М., 1999. С. 245-247.
3. **Karl-Bernd Huttenbrink.** Mechanical aspects of middle ear reconstruction. Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery. (ed. By K.-B. Huttenbrink), Dresden: Dept. Of Oto-Rhino-Larintology, Univ. of Technology, 1997. P. 165-168.
4. **Jahnke K., Lieberum B., Kuhn W.** Missing handle of malleus: reinforcement of the tympanic membrane. (ed. By K.-B. Huttenbrink), Dresden: Dept. Of Oto-Rhino-Larintology, Univ. of Technology, 1997. P. 197-199.
5. **Коршиков П.Ф.** Свободные радиально-симметричные колебания кольцевой мембраны с присоединенным стержнем // Веснік ВДУ, 2000. №3 (17). С. 72-76.

## SUMMARY

The free radially-symmetric vibrations of the hearing bar artificial limb are investigated. This approximate model includes the circular plate and the rod which are conjuncted concentrically. The transtendational equation for determination of the first eight frequencies has been obtained. Influence of low frequencies upon vari-ous parameters of the model is analyzed.

Поступила в редакцию 18.04.2001