

$$\mathcal{K}(K) = \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_6\}, \{b_2, b_3\}, \{b_3, b_4\}, \{b_4, b_5\}, \{b_5, b_6\}\}.$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться, что

$$\mathcal{DK}(K) = \{\{b_1, b_6\}, \{b_2, b_3\}, \{b_4, b_5\}\}.$$

Следовательно, включение из 4) доказанной теоремы не выполняется.

Пример 1 показывает, что слабая сопряженность подмножеств в  $n$ -арной группе шире сопряженности. Из определения 1 следует, что на  $n$ -арных подгруппах понятия сопряженности и слабой сопряженности совпадают. Так как нормализатор любой  $n$ -арной подгруппы не пуст, то для любой  $n$ -арной подгруппы  $\langle K, [] \rangle$   $n$ -арной группы  $\langle A, [] \rangle$  верно  $\mathcal{K}(K) = \mathcal{DK}(K) \subseteq \mathcal{HK}(K)$ .

Так как при  $n > 2$  существуют полусопряженные  $n$ -арные подгруппы, не являющиеся сопряженными, то понятие полусопряженности подмножеств шире слабой сопряженности подмножеств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Dörnte W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // *Math. Z.*, 1928. Bd. 29. S. 1-19.
2. *Русаков С.А.* Алгебраические  $n$ -арные системы. Мн., 1992. –264 с.
3. *Гальмак А.М.* К определению инвариантных подмножеств в  $n$ -арной группе // *Веснік МДУ імя А.А. Куляшова*, 1999, №2-3(3). С. 88-90.
4. *Воробьев Г.Н.* Слабо сопряженные подмножества  $n$ -арной группы // VIII Белорусская матем. конф. Тез. докл. Ч. 2. Мн., 2000. С. 24.
5. *Воробьев Г.Н.* К вопросу о сопряженности  $n$ -арных подгрупп в  $n$ -арной группе // *Материалы республиканской научно-методической конф. Ч. II.* Мн., 1995. С. 121.
6. *Гальмак А.М.* Теоремы Поста и Глускина-Хоссу. Гомель, 1997. – 85 с.
7. *Воробьев Г.Н.* О полусопряженности  $n$ -арных подгрупп // *Вопросы алгебры.* Гомель, 1997. Вып. 10. С.157-163.
8. *Гальмак А.М. Воробьев Г.Н.* Тернарные группы отражений. Мн., 1998. С. 105.

## SUMMARY

*Weakly conjugate subsets in  $n$ -ary groups are defined and studied in this paper.*

*Поступила в редакцию 6.06.2001*

УДК 521.542

Е.Е. Грибовская

## О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп $p$ , $p^2$ или 8

Следуя монографии [1] для произвольной конечной группы  $G$  через  $\Phi_k(G)$  будем обозначать пересечение максимальных подгрупп группы  $G$ , индексы которых не равны  $p^i$  для каждого простого  $p$  и каждого натурального  $i \leq k$ . М.В. Селькин ([1], теорема 3.4.2) показал, что в любой конечной группе  $G$  подгруппа  $\Phi_1(G)$  сверхразрешима, а  $\Phi_2(G)$  разрешима. При  $k \geq 3$  существуют конечные группы  $X$  с неразрешимой подгруппой  $\Phi_k(X)$ .

В настоящей работе исследуется строение подгруппы  $\Phi_2(G)$ . В частности, доказывается, что 2-длина  $l_2(\Phi_2(G)) \leq 2$ ,  $p$ -длина  $l_p(\Phi_2(G)) \leq 1$  для любого не-

четного простого  $p$  и нильпотентная длина  $p(\Phi_2(G)) \leq 4$ . Эти результаты являются следствиями более общей доказываемой здесь теоремы о строении нормальной разрешимой подгруппы  $K$  конечной группы  $G$ , у которой индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей  $K$ , есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8.

Рассматриваются только конечные группы. Следуя [1] через  $m(G, K) = \{M < G \mid K \not\subset M\}$  обозначается совокупность максимальных подгрупп группы  $G$ , не содержащих нормальную подгруппу  $K$ . Запись  $[A]B$  означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой  $A$  и подгруппой  $B$ . Через  $i_p(G)$  и  $n(G)$  обозначается  $p$ -длина и нильпотентная длина группы  $G$ , а классы всех нильпотентных, сверхразрешимых групп, класс всех 2-групп и нильпотентных групп нечетного порядка обозначаются через  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{N}_2$ ,  $\mathcal{N}_2$  соответственно. Если  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – формации, то  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$  – их формационное произведение. Через  $H''$  обозначается сверхразрешимый корадикал группы  $H$ , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы  $H$ , факторгруппа по которой сверхразрешима.

**Лемма 1.**  $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$  – насыщенная формация.

**Доказательство.** Заметим, что  $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$  – локальная формация по следствию 7.13 [2], а по теореме 4.3 [3] каждая локальная формация является насыщенной.

**Лемма 2** (следствие 4.2.1 [3]). Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация, содержащая  $\mathcal{N}$ . Если  $N$  нормальна в  $G$  и  $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ , то  $N \in \mathfrak{F}$ .

**Лемма 3** (лемма 3 [4]). Если  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(2, p)$ , то  $H \in \mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .

**Лемма 4.** Если  $H$  – подгруппа группы  $GL(3, 2)$ , то  $H \in \{E, GL(3, 2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \otimes Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$ .

**Доказательство.** По теореме II.6.14 [5] группа  $GL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$ , а по теореме II.8.27 [5] подгруппа  $H$  из заключения леммы.

**Лемма 5** (лемма 5 [4]). Если  $G$  – метанильпотентная группа, то  $i_p(G) \leq 1$  для любого простого  $p$ .

**Лемма 6** (лемма 2 [4]). Если  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{K}$  – формации и  $\mathfrak{F}$  наследственна, то  $\mathfrak{F}\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ .

**Теорема.** Пусть  $K$  – нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ . Если индекс каждой подгруппы из  $m(G, K)$  есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8, то  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .

**Доказательство** индукцией по порядку группы  $G$ . Заметим, что  $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$  – насыщенная формация по лемме 1. Предположим, что  $\Phi(G) \neq 1$ . Рассмотрим факторгруппу  $G/\Phi(G)$  и ее подгруппу  $K\Phi(G)/\Phi(G)$ . Так как  $m(G/\Phi(G), K\Phi(G)/\Phi(G)) = \{M/\Phi(G) < G/\Phi(G) \mid K\Phi(G)/\Phi(G) \not\subset M/\Phi(G)\} = \{M/\Phi(G) < G/\Phi(G) \mid K \not\subset M\} = m(G, K)$  и  $K\Phi(G)/\Phi(G)$  разрешима и нормальна в  $G/\Phi(G)$ , а индекс  $|G/\Phi(G) : M/\Phi(G)| = |G : M|$  есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8, то для  $G/\Phi(G)$  и  $K\Phi(G)/\Phi(G)$  условие теоремы выполняется и по индукции  $K\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ . Поскольку  $K\Phi(G)/\Phi(G) \cong K/K \cap \Phi(G)$ , то и  $K/K \cap \Phi(G) \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ . По лемме 2  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ . Далее считаем, что подгруппа Фраттини группы  $G$  единична. Поэтому подгруппа Фиттинга  $F(G)$  есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы  $G$ . Так как  $\Phi(K) \subseteq \Phi(G) = 1$ , то  $\Phi(K) = 1$ .

Проверим теперь, что в группе  $G$  минимальная нормальная подгруппа единственна. Предположим противное, тогда в  $G$  существуют две минимальные нормальные подгруппы  $N_1$  и  $N_2$ . Очевидно, что  $KN_i/N_i$  разрешима и нормальна в  $G/N_i$ ,  $i=1, 2$ . Рассмотрим  $M/N_i$  – максимальную подгруппу в  $G/N_i$  такую, что  $KN_i/N_i \not\subset M/N_i$ . Тогда  $K \not\subset M$ , поэтому  $|G : M|$  есть простое число, квад-

рат простого числа или 8. Значит, группа  $G/N_i$  с нормальной подгруппой  $KN_i/N_i$  удовлетворяет условию теоремы, и по предположению индукции  $KN_i/N_i \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ , где  $i=1,2$ . Следовательно,  $K/K \cap N_1 \cap N_2 = K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$  ввиду того, что  $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$  – формация. Итак, в группе  $G$  минимальная нормальная подгруппа единственна. Теперь подгруппа Фиттинга  $F(G)$  является единственной минимальной нормальной подгруппой в  $G$ . Так как  $F(K)$  – характеристическая подгруппа в  $K$ , а  $K$  нормальна в  $G$ , то  $F(K)$  нормальна в  $G$ . Поэтому  $F(K)=F(G)$ , группа  $G$  примитивна, и можно выбрать максимальную подгруппу  $M$  группы  $G$  такую, что  $F(K) \not\subset M$ . Теперь  $G = [F(K)]M$  и  $K=[F(K)](K \cap M)$ . Из примитивности группы  $G$  следует, что  $C_G(F(K))=F(K)$ , поэтому  $G/F(K)$  изоморфна некоторой группе автоморфизмов группы  $F(K)=F$ . Подгруппа  $M$  не содержит подгруппу  $K$ , т.е.  $M \in m(G,K)$ . Поэтому индекс  $|G : M|$  равен простому числу, либо квадрату простого числа, либо 8. Поэтому и порядок  $|F|$  есть  $p$ , либо  $p^2$ , либо 8, где  $p$  – простое число.

Пусть сначала  $|F|=p$ . Тогда  $K/F$  – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка  $p$ , и  $K$  сверхразрешима. Отсюда следует, что  $K \in \mathcal{U}$ , а так как  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ , то  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .

Пусть теперь  $|F|=p^2$ . Тогда  $K/F$  изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы  $GL(2,p)$ . Пусть  $N$  – сверхразрешимый корадикал группы  $K$ , тогда  $(K/F)^N = K^N F/F = NF/F$  – сверхразрешимый корадикал группы  $K/F$ . По лемме 3 подгруппа  $NF/F$  является 2-группой, т.е.  $NF/F \in \mathcal{N}_2$ . Если  $p > 2$ , то  $NF \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2$ . Если  $p=2$ , то ввиду нильпотентности  $F$ , подгруппа  $NF=F$  – 2 группа, т.е.  $NF=F \in \mathcal{N}_2$ . По определению сверхразрешимого корадикала  $K/NF \in \mathcal{U}$ . Теперь получаем, что  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ , либо  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .

Осталось рассмотреть случай, когда  $|F|=8$ . Тогда  $K/F$  изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы  $GL(3,2)$ . Заметим, что в этом случае подгруппа Фиттинга  $F$  является наибольшей нормальной 2-подгруппой группы  $K$ , т.е.  $F = O_2(K)$ . Поэтому  $O_2(K/F) = 1$ . По лемме 2 группа  $K/F \in \{Z_3, [Z_3]Z_2, Z_7, [Z_7]Z_3\}$  и  $K/F$  сверхразрешима. Значит  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{U}$ , а так как  $\mathcal{N}_2\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ , то  $K \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ . Теорема доказана.

В случае, когда  $G=K$  из теоремы непосредственно вытекает

**Следствие 1** (теорема [6]). *Если в разрешимой группе  $G$  индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 8, то  $G \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .*

Через  $\Phi_2^+(G)$  обозначим пересечение максимальных подгрупп группы  $G$ , индексы которых не равны простым числам, квадратам простых чисел или 8. Если таких максимальных подгрупп в группе  $G$  нет, то полагаем  $\Phi_2^+(G)=G$ . Так как в  $PSL(2,7)$  все максимальные подгруппы имеют индексы 7 или 8, то  $\Phi_2^+(PSL(2,7))=PSL(2,7)$ . Ясно, что в любой группе  $\Phi_2^+(G) \geq \Phi_2(G)$ .

**Следствие 2.** *Если в группе  $G$  подгруппа  $\Phi_2^+(G)$  разрешима, то  $\Phi_2^+(G) \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $M_2^+(G)$  – совокупность максимальных подгрупп из  $G$ , индексы которых являются простыми числами, квадратами простых чисел или равны 8. Если  $A$  – максимальная в  $G$  подгруппа, не принадлежащая  $M_2^+(G)$ , и  $\alpha$  – автоморфизм группы  $G$ , то  $|G : A| = |G : \alpha(A)|$  и подгруппа  $\alpha(A)$  также не принадлежит  $M_2^+(G)$ . Очевидно, что  $\Phi_2^+(G)$  есть пересечение подгрупп  $A$ , которые являются максимальными в  $G$ , и  $A \notin M_2^+(G)$ . Подгруппа  $\Phi_2^+(G)$  является характеристической в группе  $G$ . Если  $B \in m(G, \Phi_2^+(G))$ , то  $B$  – максимальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  не содержит  $\Phi_2^+(G)$ . Поэтому  $B \in M_2^+(G)$  и индекс подгруппы  $B$  в группе  $G$  есть простое число, квадрат про-

стого числа или 8. Таким образом, группа  $G$  с разрешимой нормальной подгруппой  $\Phi_2^+(G)$  удовлетворяет условию теоремы. Поэтому  $\Phi_2^+(G) \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2\mathcal{U}$ .

**Следствие 3.** Пусть  $K$  – нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ . Если индекс каждой подгруппы из  $m(G, K)$  есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8, то  $l_2(K) \leq 2$  и  $l_p(K) \leq 1$  для любого простого  $p > 2$ .

**Доказательство.** Из теоремы следует, что группа  $K$  обладает нормальным рядом  $1 \leq T \leq K$  с метанильпотентными факторами  $K/T$  и  $T$ . Теперь с помощью леммы 5 получаем, что  $l_p(K) \leq 2$  для любого простого  $p$ .

Для доказательства оценки  $l_p(K) \leq 1$  при  $p > 2$  воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$ . Можно считать, что  $F(G) = O_p(G) = 1$ , а подгруппа Фиттинга  $F = F(G)$  группы  $G$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Ввиду того, что  $F(K) \subseteq F(G)$ , подгруппа  $F(K)$  нормальна в  $G$  и  $F(K) \neq 1$ , получаем, что  $F(K) = F(G)$ . Теперь группа  $G$  примитивна и можно выбрать максимальную подгруппу  $M$  группы  $G$  такую, что  $F(K) \not\subseteq M$ . Таким образом,  $G = [F(K)]M$  и  $K = [F(K)](K \cap M)$ . Подгруппа  $M$  не содержит подгруппу  $K$ , т.е.  $M \in m(G, K)$ . Поэтому индекс  $|G : M|$  равен простому числу, либо квадрату простого числа, либо 8. Значит порядок  $|F(K)|$  есть  $p$ , либо  $p^2$ , где  $p$  – простое число. Поэтому силовская  $p$ -подгруппа  $G_p = [F](G_p \cap M) = [F]M_p$ , где  $M_p$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $M$ , а  $F = F(K)$ . Тогда  $K_p = [F](M \cap K_p)$ . Если  $M \cap K_p = 1$ , то  $F = K_p$  и  $l_p(G) \leq 1$ . Пусть  $M \cap K_p \neq 1$ .

Если  $|F| = p$ , то факторгруппа  $K/F$  изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов  $\text{Aut } F$  группы  $F$ , порядок которой равен  $p-1$ . Отсюда,  $K_p = F$  и  $l_p(G) \leq 1$ .

Пусть теперь  $|F| = p^2$ . Тогда факторгруппа  $K/F$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p)$ , порядок которой равен  $(p^2-1)(p^2-p)$ . Порядок силовской  $p$ -подгруппы  $K_p$  группы  $K$  равен  $p^3$ . Если  $K_p$  абелева, то  $l_p(G) \leq 1$ , [5, с. 753]. Если  $K_p$  неабелева, то она изоморфна либо метациклической группе  $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$ , либо группе экспоненты  $p$ , [5, с. 93]. Согласно лемме 1 [7] первый случай невозможен, а по теореме Холла–Хигмэна [8] во втором случае  $l_p(K) \leq 1$ . Следствие доказано.

При  $K=G$  следствие 3 превращается в следующее утверждение.

**Следствие 4** (теорема [6]). Если в разрешимой группе  $G$  индексы максимальных подгрупп равны простым числам, либо квадратам простых чисел, либо 8, то  $l_2(G) \leq 2$  и  $l_p(G) \leq 1$  для любого простого  $p > 2$ .

**Следствие 5.** Если в группе  $G$  подгруппа  $\Phi_2^+(G)$  разрешима, то  $l_2(\Phi_2^+(G)) \leq 2$  и  $l_p(\Phi_2^+(G)) \leq 1$  для любого простого  $p > 2$ .

**Доказательство.** Как и в следствии 1 доказывается, что индекс каждой максимальной подгруппы из  $m(G, \Phi_2^+(G))$  есть простое число, квадрат простого числа или равен 8. По следствию 2 теоремы  $l_2(\Phi_2^+(G)) \leq 2$  и  $l_p(\Phi_2^+(G)) \leq 1$  для любого простого  $p > 2$ .

Поскольку в любой группе  $\Phi_2^+(G) \geq \Phi_2(G)$ , то утверждение следствия 5 справедливо и для подгруппы  $\Phi_2(G)$ . Поэтому следствие 5 усиливает следствие 3.4.11 [1].

**Следствие 6.** Пусть  $K$  – нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ . Если индекс каждой подгруппы из  $m(G, K)$  есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8, то  $n(K) \leq 4$ . В частности, если  $\Phi_2^+(G)$  разрешима, то  $n(\Phi_2^+(G)) \leq 4$ .

**Доказательство.** Из теоремы следует, что сверхразрешимый корадикал  $K^{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_2\mathcal{N}_2$ . Так как сверхразрешимая группа имеет нильпотентный коммутант, то  $n(K) \leq 4$ .

При  $K=G$  следствие 6 превращается в следующее утверждение.

**Следствие 7.** Если в разрешимой группе  $G$  индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, либо квадратами простых чисел, либо равны 8, то  $n(G) \leq 4$ .

**Следствие 8.** Пусть  $K$  – нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ . Если индекс каждой подгруппы из  $m(G, K)$  есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8, то сверхразрешимый корадикал группы  $K$  дисперсивен по Оре.

При  $K=G$  следствие 8 превращается в следующее утверждение, которое, в частности, обобщает теорему 3 [9].

**Следствие 9.** Если в разрешимой группе  $G$  индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, либо квадратами простых чисел, либо равны 8, то сверхразрешимый корадикал группы  $G$  дисперсивен по Оре.

**Следствие 10.** Пусть  $K$  – нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ . Если индекс каждой подгруппы из  $m(G, K)$  есть простое число, либо квадрат простого числа, либо 8, тогда подгруппа Фиттинга группы  $K$  содержит 2'-холловскую подгруппу сверхразрешимого корадикала группы  $K$ . В частности, если  $\Phi_2^+(G)$  разрешима, то подгруппа Фиттинга группы  $\Phi_2^+(G)$  содержит 2'-холловскую подгруппу сверхразрешимого корадикала группы  $\Phi_2^+(G)$ .

Поскольку в любой группе  $\Phi_2^+(G) \geq \Phi_2(G)$ , то утверждение следствия 10 справедливо и для подгруппы  $\Phi_2(G)$ . Поэтому следствие 10 обобщает следствие 3.4.12 [1].

При  $K=G$  следствие 10 превращается в следующее утверждение, которое, в частности, обобщает теорему 4 [9].

**Следствие 11.** Если в разрешимой группе  $G$  индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, либо квадратами простых чисел, либо равны 8, то подгруппа Фиттинга группы  $G$  содержит 2'-холловскую подгруппу сверхразрешимого корадикала группы  $G$ .

Следующее утверждение дает новую информацию о подгруппе  $\Phi_2(G)$ , введенной М.В. Селькиным ([1], 3.4).

**Следствие 12.** (1)  $\Phi_2(G) \in \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ ;

(2)  $l_2(\Phi_2(G)) \leq 2$  и  $l_p(\Phi_2(G)) \leq 1$  для любого простого  $p > 2$ ;

(3)  $n(\Phi_2(G)) \leq 4$ ;

(4) сверхразрешимый корадикал группы  $\Phi_2(G)$  дисперсивен по Оре;

(5) подгруппа Фиттинга группы  $\Phi_2(G)$  содержит 2'-холловскую подгруппу сверхразрешимого корадикала группы  $\Phi_2(G)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп // Мн., 1997. – 144 с.
2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем // М., 1989. – 256 с.
3. Шеметков Л.А. Формации конечных групп // М., 1978. – 272 с.
4. Грибовская Е.Е., Монахов В.С. Конечные группы с индексами максимальных подгрупп, не делящимися на  $p^4$  // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. № 91. Март 2000. – 11 с.
5. Huppert B. Endliche Gruppen I // Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1967. – 792 s.
6. Грибовская Е.Е. Разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп  $p$ ,  $p^2$  или 8 // Минск, VII Белорусская Математическая конференция. (Тезисы докладов, часть 2), 2000. С.31.
7. Монахов В.С. О произведении групп с циклическими подгруппами индекса 2 // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. н., 1996, № 3. С. 21-24.
8. Hall P., Higman G. On the  $p$ -length of a  $p$ -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. London, Math. Soc., 1956. V.3. P. 1-42.

S U M M A R Y

In this paper the normal soluble subgroups  $K$  of the finite group  $G$  with limited indices of maximal subgroups is described. It is proved that  $K \in N_2N_2U$ . From this result follows that  $\Phi_2^+(G) \in N_2N_2U$ ,  $n(\Phi_2^+(G)) \leq 4$ ,  $l_p(\Phi_2^+(G)) \leq 1$  for every prime  $p \geq 2$  and  $l_2(\Phi_2^+(G)) \leq 2$ .

Поступила в редакцию 15.03.2001

УДК 539.4

П.Ф. Коршиков, Г.И. Михасев

## Свободные радиально-симметричные колебания вязкоупругой кольцевой пластины, сопряженной со стержнем

В данной работе рассматривается простейшая механико-математическая модель среднего уха человека после хирургической реконструкции [1-2]. Исследуемая модель описывает так называемый стержневой протез [3-4], который устанавливается в среднем ухе так, что один конец стержня соединен с восстановленной мембраной, а второй – с основанием стремени. Модель, описывающая колебания кольцевой мембраны, сопряженной со стержнем, отражена в работе [5]. В новой модели учитывается как цилиндрическая жесткость, так и вязкоупругие свойства мембраны, так что последняя трактуется как вязкоупругая кольцевая пластинка, находящаяся под действием осевых растягивающих сил. В данной работе исследуются радиально-симметричные колебания пластины, при которых основание стремени совершает поступательное движение вдоль оси стержня.

Рассмотрим тонкую кольцевую радиально растянутую вязкоупругую пластинку, сопряженную со стержнем (рис.).

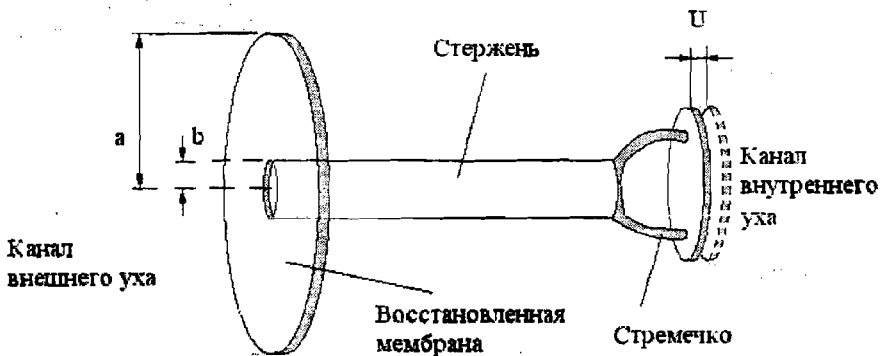


Рис. 1. Модель стержневого протеза