УДК 521.542

Е.Е. Грибовская

О дисперсивности группы с заданными индексами максимальных подгрупп

Рассматриваются только конечные группы. Для группы G совокупность вложенных подгрупп

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \ldots \leq H_{k-1} \leq H_k = G \qquad (*)$$

называют максимальной цепочкой, если для каждого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ подгруппа H_i максимальна в H_{i+1}. Индексы $|H_{i+1}:H_i|$ называют индексами цепочки (*).

В 1954 году Хупперт [1] исследовал строение группы G, у которой индексы максимальных цепочек подгрупп – простые числа или равны квадратам простых чисел. В частности, он показал, что силовская p-подгруппа таких групп для наибольшего простого делителя p порядка группы нормальна в группе при $p > 3$. Отсюда следует, что ее $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре. Позднее Ф.Холл доказал разрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам или квадратам простых чисел (теорема 10.5.7 [2]).

В данной статье рассматриваются группы с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам или квадратам простых чисел. В работах С.Ф. Каморникова [3] и автора [4] получена информация о сверхразрешимом корадикале группы G и оценки её нильпотентной длины и p-длины. Здесь получена новая информация о группе с такими индексами максимальных подгрупп.

Теорема 1. *Пусть G – группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам или квадратам простых чисел. Тогда силовская p-подгруппа для наибольшего простого делителя p порядка группы нормальна в группе при $p > 3$.*

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства теоремы Ф. Холла (теорема 10.5.7 [2]). Будем доказывать теорему индукцией по порядку группы G. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы, а G_p – ее силовская p-подгруппа. Допустим, что $p>3$.

Предположим, что подгруппа Фраттини $\Phi(G) \neq 1$. Рассмотрим факторгруппу $G/\Phi(G)$, в ней подгруппа $G_p\Phi(G)/\Phi(G)$ является силовской и по предположению индукции нормальной, поэтому $G_p\Phi(G)$ нормальна в G. По лемме Фраттини $G = N_G(G_p)\Phi(G)$, отсюда следует, что подгруппа G_p нормальна в группе G. Далее считаем, что подгруппа Фраттини единична, т.е. $\Phi(G) = 1$.

Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное, пусть F_1 и F_2 – две минимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда подгруппа G_pF_i/F_i является силовской p-подгруппой в группе G/F_i, $i = 1, 2$. По предположению индукции G_pF_i нормальна в G, поэтому $G_pF_1 \cap G_pF_2 = G_p$ и подгруппа G_p нормальна в группе G.

Итак, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа F, которая является подгруппой Фиттинга группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$, факторгруппа G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F и

$G = [F]M$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Здесь запись $G = [F]M$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой F и подгруппой M. Отсюда следует, что порядок $|F|$ равен q или q^2, где q – некоторое простое число и $q \le p$.

В случае, когда $p = q$ получаем, что $G_pF = G_p$ нормальна в G. Поэтому в дальнейшем считаем, что $p > q$.

Пусть сначала $|F| = q$, тогда G/F – циклическая группа порядка, делящего $q-1$. Ввиду того, что p – наибольший простой делитель порядка группы G, этот случай исключается.

Пусть теперь $|F| = q^2$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,q)$, порядок которой равен $(q^2-q)(q^2-1)$. Поэтому порядок группы G равен $q^2(q^2-q)(q^2-1) = q^3(q-1)^2(q+1)$ и либо p делит q^3, либо p делит $q+1$. Если p делит q^3, то $p = q$ – противоречие. Если же p делит $q+1$, то $p = 3$, а это противоречит условию теоремы.

Значит предположение неверно и G_p нормальна в G. Теорема доказана.

Неоднократное применение теоремы приводит к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть G – группа, у которой индексы максимальных подгрупп – простые числа или квадраты простых чисел. Тогда $\{2,3\}'$-холлова подгруппа группы G нормальна и дисперсивна по Оре.*

Следствие 2. *Если в группе G нечетного порядка все максимальные подгруппы имеют индексами простые числа или квадраты простых чисел, то G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. По индукции подгруппа Фраттини единична, а $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, обладающая дополнением в G, и $F = C_G(F)$. Тогда порядок подгруппы F равен p или p^2, где p – простое число. Если $|F| = p$, то G/F – циклическая группа порядка, делящего $p-1$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$, порядок которой равен $(p^2-p)(p^2-1)$.

Поэтому p – наибольший простой делитель порядка группы G. Так как G/F – неприводимая p'–подгруппа нечетного порядка группы $GL(2,p)$, то опять подгруппа G/F циклическая. Поэтому G– дисперсивна по Оре. Следствие доказано.

Следствие 3. *Если в группе G все максимальные подгруппы имеют индексами простые числа или квадраты простых чисел и 3 не делит порядок группы G, то G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Обозначим через $G_{\{2,3\}'}$ и $G_{\{2\}'}$ – $\{2,3\}'$-холлову и $2'$-холлову подгруппы группы G соответственно. Так как $G_{\{2,3\}'}$ – нормальная подгруппа группы G по следствию 1 и $G_{\{2,3\}'} \square G_{\{2\}'}$, то G – дисперсивная по Оре группа. Следствие доказано.

Отметим, что утверждения следствий 1–3 также являются новыми результатами. Кроме того, приведенная теорема 1 обобщает отмеченный результат Хупперта.

Следствие 4. *Пусть G – группа, у которой все индексы максимальных подгрупп равны простым числам или квадратам простых чисел, тогда $\{2,p\}$-холлова подгруппа группы G дисперсивна по Оре для любого простого $p > 3$.*

Доказательство. Обозначим $\{2, p\}$-холлову подгруппу группы G через $G_{\{2,p\}}$. Пусть $p > 3$. Из теоремы 1 следует, что силовская p-подгруппа группы $G_{\{2,p\}}$ нормальна в $G_{\{2,p\}}$, поэтому $G_{\{2,p\}}$ дисперсивна по Оре. Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп – простые числа, квадраты простых чисел или равны 8.*

Тогда силовская р-подгруппа для наибольшего простого делителя р порядка группы нормальна в группе при р > 3 и р≠7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя доказательство теоремы 1, остается лишь рассмотреть случай, когда $|F| = 8$. Тогда факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(3,2)$, порядок которой равен $(2^3-2^2)(2^3-2)(2^3-1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Поскольку p – наибольший простой делитель порядка группы G, то $p = 7$, что исключается условием. Опять пришли к противоречию. Поэтому силовская p-подгруппа для наибольшего простого делителя p порядка группы нормальна в группе при $p > 3$ и $p \neq 7$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G – разрешимая группа, у которой все индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 8. Тогда {2,3,7}'-холлова подгруппа группы G нормальна и дисперсивна по Оре.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Huppert B.*** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr., 1954. 60. S. 409-434.
2. ***Холл М.*** Теория групп. М., 1962. – 468 с.
3. ***Каморников С.Ф.*** К теореме Ф. Холла // Вопросы алгебры, вып. 5. Мн., 1990. – 96 с.
4. ***Грибовская Е.Е.*** Разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8 // VII Белорусская Математическая конференция. Тез. докл. Ч. 2. Мн., 2000. С. 31.

S U M M A R Y

There are investigated finite groups with limited indices. If indices of maximal subgroups are equal a prime or a prime's square then it is proved that Sylow p-subgroup for maximal prime divise of the group's order is normal for p>3. From this result follows that {2,3}'-Hall subgroup is normal and has Sylow tower. Analogy result received for group whose indices of maximal subgroups are equal a prime or a prime's square or 8: {2,3,7}'- Hall subgroup is normal and has Sylow tower.

Поступила в редакцию 21.11.2002