

С.П. Кунцевич

## Численное решение уравнений локальных параметрических колебаний тонкой цилиндрической оболочки

Расчет оболочек является одной из самых актуальных проблем механики деформируемого твердого тела. Это объясняется широким использованием оболочек в различных областях техники и в строительстве. Основными методами исследования оболочек являются асимптотические, численные и вариационные.

В работах [1, 2] было выполнено асимптотическое исследование свободных и параметрических колебаний цилиндрических оболочек под действием неоднородной пульсирующей осевой нагрузки. Целью данной статьи является построение численного решения уравнений движения цилиндрической оболочки.

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку с плоскими краями, в основании которой лежит окружность радиуса  $R$  (рис. 1).

На срединной поверхности оболочки введем ортогональную систему криволинейных координат  $(x, y)$ , где  $x$  – координата точки на образующей, отсчитываемая от края ( $0 \leq x \leq L$ ,  $L$  – длина образующей), а  $y$  – длина дуги направляющей, отсчитываемая от некоторой образующей ( $y_1 \leq y \leq y_2$ ).

Перейдем к безразмерной системе координат  $(s, \varphi)$ , где

$$s = x/R, \quad 0 \leq s \leq l = L/R,$$

$$\varphi = y/R, \quad y_1/R = \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 = y_2/R.$$

Пусть оболочка находится под действием неоднородной осевой нагрузки

$$T_1^*(\varphi, t^*) = \mu^2 E h (f_0(\varphi) + \mu f_1(\varphi) \cos \Omega^* t^*). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega^*$  – частота периодической составляющей нагрузки;  $\mu$  – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки:

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)}.$$

Для описания движения оболочки в окрестности безмоментного нестационарного напряженно-деформированного состояния воспользуемся записанной в безразмерном виде системой уравнений пологих оболочек [3]:

$$\mu^4 \Delta^2 w + \mu^2 \Delta_{\tau} w + \Delta_{\kappa} \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\mu^2 \Delta^2 \Phi - \Delta_{\kappa} w = 0.$$

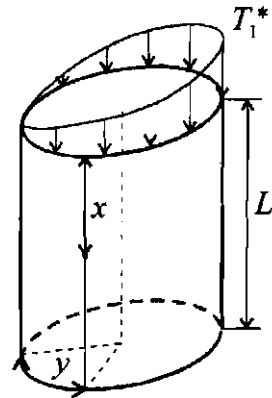


Рис. 1. Круговая цилиндрическая оболочка

Здесь  $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$ ,  $\Delta_T z = T_1(\varphi, t) \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ ,  $\Delta_k z = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ ,  
 безразмерные величины вводятся по формулам

$$w = w^* / R, \quad \Phi = \Phi^* / (\mu^2 E h R^2),$$

$$T_1(\varphi, t) = f_0(\varphi) + \mu f_1(\varphi) \cos \Omega t, \quad (3)$$

$$t = t^* / t_c, \quad \Omega = \Omega^* t_c, \quad t_c = R \sqrt{\rho / E}.$$

На краях оболочки  $s = 0, l$  будем рассматривать условия шарнирного опирания:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0. \quad (4)$$

Задача (2)–(4) допускает разделение переменных

$$w(s, \varphi, t) = w_n(\varphi, t) \sin\left(\frac{q_n s}{\mu}\right), \quad \Phi(s, \varphi, t) = \Phi_n(\varphi, t) \sin\left(\frac{q_n s}{\mu}\right),$$

$$q_n = \frac{\mu n \pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для неизвестных функций  $w_n$  и  $\Phi_n$  получаем систему уравнений:

$$\mu^4 \frac{\partial^4 w_n}{\partial \varphi^4} - 2\mu^2 q_n^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial \varphi^2} + q_n^4 w_n - q_n^2 \Phi_n - q_n^2 T_1(\varphi, t) w_n + \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = 0,$$

$$\mu^4 \frac{\partial^4 \Phi_n}{\partial \varphi^4} - 2\mu^2 q_n^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \varphi^2} + q_n^4 \Phi_n + q_n^2 w_n = 0 \quad (5)$$

При этом граничные условия (4) выполняются автоматически. Далее индекс  $n$  у  $q_n$ ,  $w_n$  и  $\Phi_n$  опускается.

Для численного решения системы уравнений (5) воспользуемся методом разностных схем [4]. Решения будем искать в узлах равномерной прямоугольной сетки

$$\omega_{\delta\tau} = \{(\varphi_i = i\delta, t_j = j\tau)\}, \quad (6)$$

$$i = -N, -N+1, \dots, N, \quad \delta = \pi / N, \quad j = 0, 1, \dots$$

На семиточечном шаблоне (см. рис. 2) выполним разностную аппроксимацию дифференциальных операторов, входящих в уравнения (5):

$$\frac{\partial^4 Z_{i,j}}{\partial \varphi^4} \sim \frac{1}{\delta^4} \left[ Z_{i-2,j} - 4Z_{i-1,j} + 6Z_{i,j} - 4Z_{i+1,j} + Z_{i+2,j} \right],$$

$$\frac{\partial^2 Z_{i,j}}{\partial \varphi^2} \sim \frac{1}{\delta^2} \left[ -\frac{1}{12} Z_{i-2,j} + \frac{4}{3} Z_{i-1,j} - \frac{5}{2} Z_{i,j} + \frac{4}{3} Z_{i+1,j} - \frac{1}{12} Z_{i+2,j} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 Z_{i,j}}{\partial t^2} \sim \frac{1}{\tau^2} \left[ Z_{i,j-1} - 2Z_{i,j} + Z_{i,j+1} \right], \quad Z_{i,j} = Z(\varphi_i, t_j).$$

Выполняя замену согласно (7), приходим к следующим разностным уравнениям:

$$A w_{i-2,j} - B w_{i-1,j} + C w_{i,j} - D w_{i+1,j} + E w_{i+2,j} - q^2 \Phi_{i,j} - q^2 T_1(\varphi_i, t_j) w_{i,j} + \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\tau^2} = 0, \quad (8)$$

$$A \Phi_{i-2,j} - B \Phi_{i-1,j} + C \Phi_{i,j} - D \Phi_{i+1,j} + E \Phi_{i+2,j} + q^2 w_{i,j} = 0,$$

где

$$A = E = \frac{\mu^4}{\delta^4} + \frac{1}{6} \frac{\mu^2 q^2}{\delta^2}, \quad B = D = 4 \frac{\mu^4}{\delta^4} + \frac{8}{3} \frac{\mu^2 q^2}{\delta^2}, \quad C = 6 \frac{\mu^4}{\delta^4} + 5 \frac{\mu^2 q^2}{\delta^2} + q^4.$$

Полученная явная трехслойная схема (8) обеспечивает аппроксимацию уравнений (5) с точностью  $O(\delta^2 + \tau^2)$  и является условно устойчивой при [4]

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{A+B+C+D+E}} = \frac{\delta^2}{2\mu^2} + O\left(\frac{\delta^4}{\mu^4}\right). \quad (9)$$

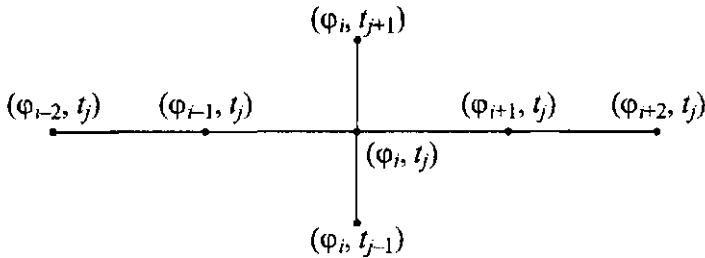


Рис. 2. Семиточечный шаблон

В том случае, когда условие (9) не выполняется, в процессе численного решения быстро накапливаются ошибки округления, что приводит к значительному искажению результатов (вплоть до получения машинной бесконечности).

Как известно [4], если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то порядок точности (скорость сходимости) схемы определяется ее порядком аппроксимации. Для практической оценки точности полученного решения можно воспользоваться, например, правилом Рунге, согласно которому необходимо сравнивать результаты расчетов, полученных для сеток (6) с разными шагами  $\tau$  и/или  $\delta$ .

На краях  $\varphi_{-N} = -\pi$ ,  $\varphi_N = \pi$  будем удовлетворять условиям периодичности решения по  $\varphi$ . Для этого достаточно добавить к сетке (6) еще три прямых:

$$\varphi_{-N-1} = -\pi - \delta, \quad \varphi_{N+1} = \pi + \delta, \quad \varphi_{N+2} = \pi + 2\delta$$

и положить

$$w_{-N-1,j} = w_{-N-1,j}, \quad w_{N,j} = w_{-N,j}, \quad w_{N+1,j} = w_{-N+1,j}, \quad w_{N+2,j} = w_{-N+2,j}.$$

Для выделения единственного решения из всей совокупности возможных решений следует задать начальные условия – значения сеточных функций  $w_{i,0}$  и  $w_{i,1}$ , соответствующие моментам времени  $t=0$  и  $t=\tau$ . Положим  $w_{i,0} = 0$ , а в качестве  $w_{i,1}$  будем использовать быстро изменяющуюся гармоническую функцию

$$w_{i,1} = \tau \cos(\mu^{-1} p \varphi_i),$$

где параметр  $p$  вычисляется по формуле

$$p = \sqrt{q - q^2}.$$

Данное значение  $p$  соответствует изменчивости найденной в [1] формы локальных параметрических колебаний:

$$w = \{ [S_m(\mu t) \sin \omega_0 t + C_m(\mu t) \cos \omega_0 t] + O(\mu^{1/2}) \} \times \exp \left\{ i \mu^{-1} \left[ p(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} b(\varphi - \varphi_0)^2 \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $S_m$ ,  $C_m$  – суть решения некоторой системы дифференциальных уравнений с периодической матрицей,  $\omega_0$  – частота собственных колебаний оболочки,  $\varphi_0$  – образующая, в окрестности которой локализованы колебания,  $b$  – параметр, характеризующий ширину области интенсивных колебаний.

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку с параметрами

$$h/R = 0.01, \quad L/R = 0.52, \quad \nu = 0.3.$$

Пусть на оболочку действует комбинированная неоднородная осевая нагрузка (3), где

$$f_0(\varphi) = 0,5(1 + \cos \varphi), \quad f_1 \equiv 1, \quad \Omega = 0.5. \quad (11)$$

На рис. 3 изображены графики функций  $w(\varphi, t)$  при  $t = 15$ . Кривая  $a$  получена по формуле (10), кривая  $ч$  получена в результате решения разностных уравнений (8). Из рисунка хорошо видно, что численное и аналитическое решения имеют одинаковый характер в окрестности слабой образующей  $\varphi_0 = 0$ , где определяющей является исследованная в [1] локализованная форма колебаний. По мере удаления от слабой образующей основной вклад уже вносят другие формы колебаний.

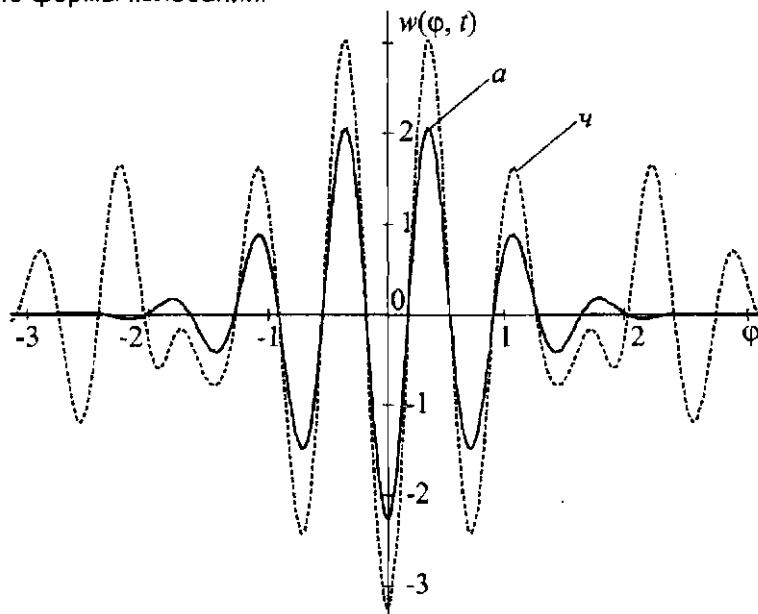


Рис. 3. График функции  $w(\varphi, t)$  при  $t = 15$

На рис. 4 изображена зависимость от времени  $t$  величины прогиба  $w$  на образующей  $\varphi_0 = 0$ , найденная аналитически (кривая  $a$ ) и численно (кривая  $ч$ ). Согласно [2], значение  $\Omega = 0.5$  частоты периодической составляющей осевой нагрузки не входит в границы теоретически рассчитанной области локальной параметрической неустойчивости, что полностью подтверждается выполненными расчетами – на рассматриваемом промежутке времени характер как численного, так и аналитического решения одинаков: они близки к периодическим функциям. Отметим, что и за пределами промежутка, изображенного на графике, характер решений не меняется.

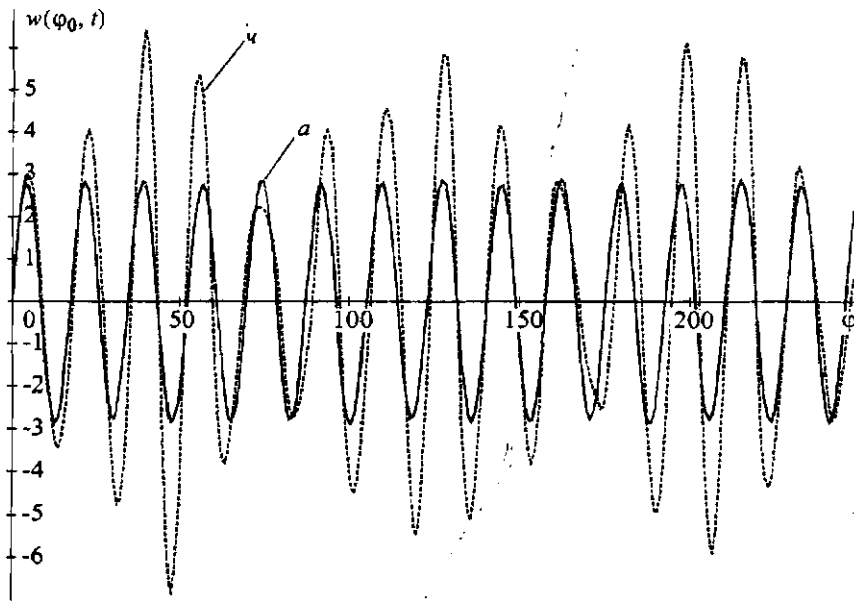


Рис. 4. График функции  $w(\varphi_0, t)$  при  $t \in [0; 250]$

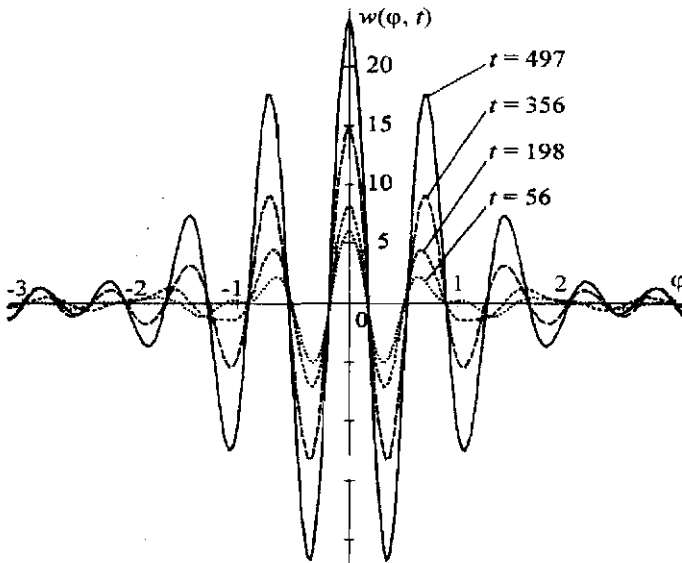


Рис. 5. Графики функции  $w(\varphi, t)$  в разные моменты времени

Теперь рассмотрим поведение этой же оболочки под действием осевой нагрузки (11) с другой частотой периодической составляющей:

$$\Omega = 0.71.$$

В этом случае наблюдается ярко выраженная локализация решений около образующей  $\varphi_0 = 0$  с медленным нарастанием амплитуды колебаний. Полученные в результате численных расчетов графики функции  $w(\varphi, t)$  в разные моменты времени  $t$  приведены на рис. 5. В случае параметрического резонан-

са основной вклад в численное решение вносит ранее найденная локализованная форма колебаний (10).

Из графиков видно, что рассматриваемая нагрузка не приводит к возрастанию амплитуд остальных форм колебаний и их вклад в решение заметен лишь вдали от слабой образующей, по мере убывания решения (10).

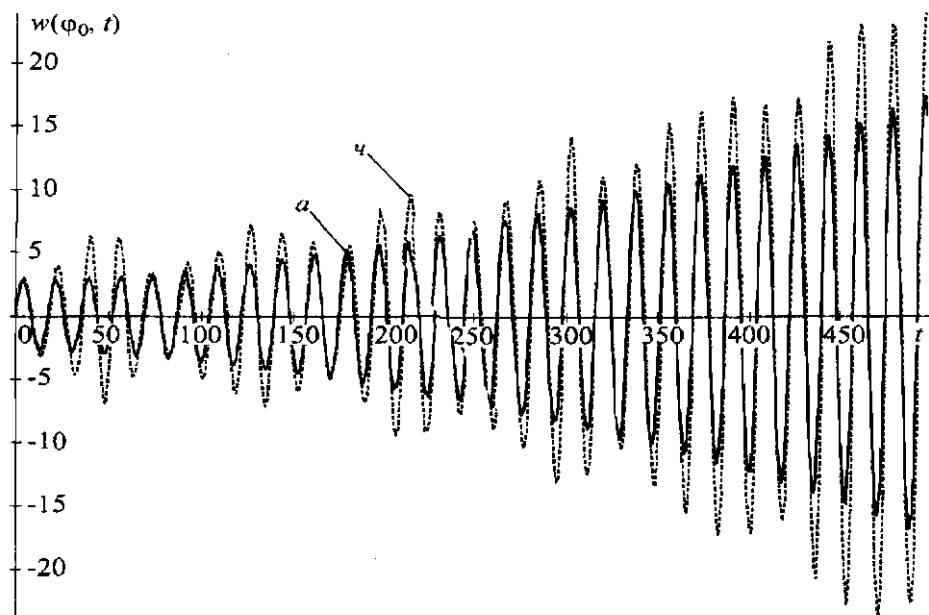


Рис. 6. График функции  $w(\varphi_0, t)$  при  $t \in [0; 500]$

На рис. 6 изображена зависимость от времени  $t$  величины прогиба  $w$  на образующей  $\varphi_0 = 0$ , найденная аналитически (кривая  $a$ ) и численно (кривая  $b$ ). Как численное, так и аналитическое решение имеют одинаковый характер – с течением времени неограниченно возрастают. Это полностью подтверждает ранее сделанный вывод о том, что данная частота возбуждения лежит в главной области параметрической неустойчивости для рассматриваемой формы колебаний [2].

Проведенные расчеты наглядно показывают возможность возникновения локализованных форм параметрических колебаний, приводящих к потере устойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Mikhasev G.I.** Free and Parametric Vibrations of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial Loads // Technische Mechanik, 1997. Band 17, Heft 3. S. 209-216.
2. **Kuntsevich S.P., Mikhasev G.I.** Parametric Vibrations of Viscoelastic Cylindrical Shell under Static and Periodic Axial Loads // Technische Mechanik, 1999. Band 19, Heft 3. S. 187-195.
3. **Тюестик П.Е.** Устойчивость тонких оболочек асимптотические методы. М., 1995. – 320 с.
4. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М., 1989. – 616 с.

## S U M M A R Y

*Low-frequency parametric vibrations of a cylindrical shell subjected to axial static and additional periodic loads are studied. It is assumed that the load is non-uniform in the circumferential direction. Using the difference method the numerical solutions has been obtained for two cases.*

*Поступила в редакцию 5.07.2003*