УДК 512.542

В.Г. Сементовский

О строении инъекторов конечных π-разрешимых групп

Во всякой разрешимой группе G для любых классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, а также для их произведения $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ всегда существуют единственные классы сопряженных инъекторов. Отсюда возникает следующая задача – выразить $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор группы G через $\mathfrak{X}$-инъекторы и $\mathfrak{Y}$-инъекторы некоторых подгрупп группы G, а также подгрупп ее факторгруппы. Такая задача была полностью решена Локкетом [1].

Данная работа посвящена перенесению результатов работы [1] о строении $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъекторов разрешимых групп на π-разрешимые группы.

В работе рассматриваются только конечные π-разрешимые группы для произвольного фиксированного множества простых π. Терминология работы общепринята.

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты.

Определение 1 [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, V – $\mathfrak{F}$-подгруппа π-разрешимой группы G, и $I = G_k \subset G_{k-1} \subset \ldots \subset G_0 = G$ – нормальный ряд группы G. Если для любого $i = 1,2,\ldots,k$ подгруппа $V \cap G_i$ $\mathfrak{F}$-максимальна в G_i, то будем говорить, что V $\mathfrak{F}$-инъектирует заданный ряд. Если подгруппа $\mathfrak{F}$-инъектирует хотя бы один нормальный ряд группы G, факторы которого π-разложимы, то назовем ее $\mathfrak{F}$-инъектирующей подгруппой группы G.

Определение 2 [2]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), если во всякой π-разрешимой группе G вида $G = WG_{\pi'}$, где W – нормальная в G $\mathfrak{F}$-подгруппа, всякие две $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы G, содержащие W, сопряжены.

Теорема 1 [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) класс $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*);

2) во всякой π-разрешимой группе G *множество всех $\mathfrak{F}$-инъектирующих подгрупп группы* G *образует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов группы* G.

Теорема 2 [2]. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, удовлетворяющие условию* (*), *и либо $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, либо $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{Y}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ тоже удовлетворяет условию* (*).

Пусть $\mathfrak{S}^\pi$ – класс всех конечных π-разрешимых групп. Если множество простых чисел ρ такое, что либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$, то по теореме Чунихина–Холла во всякой группе G из $\mathfrak{S}^\pi$ существуют единственные классы сопряженных ρ-холловских и ρ'-холловских подгрупп. Тогда, следуя Локкету, можно на множестве $\mathfrak{S}^\pi$ ввести класс групп $L_\rho(\mathfrak{F}) = \{ G \in \mathfrak{S}^\pi \mid G = FG_{\rho'}$, где F – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G$\}$.

Лемма 3. *Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию* (*) *и, либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$*, то:

1) $L_\rho(\mathfrak{F})$ *будет классом Фиттинга*;

2) $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{S}_{\rho'}^{\pi} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\rho'}^{\pi} \subseteq L_\rho(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\rho'}^{\pi} = L_\rho(\mathfrak{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mathfrak{L} = L_\rho(\mathfrak{F})$. Пусть $G \in \mathfrak{L}$ и V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Тогда существует ρ-холловская подгруппа G_ρ групы G, содержащаяся в V. Если N – нормальная подгруппа группы G, то $V \cap N$ будет $\mathfrak{F}$-инъектором подгруппы N, и $\mathfrak{S}_\rho \cap N = N_\rho \subseteq V \cap N$. Итак, класс $\mathfrak{L}$ S_n-замкнут.

Пусть теперь $G = NK$, где N и K – нормальные подгруппы группы G. Тогда $V \cap N$ содержит ρ-холловскую подгруппу N_ρ из N, а $V \cap K$ – ρ-холловскую подгруппу K_ρ из K. Так как $G = NK$, то $N_\rho K_\rho = G_\rho$. Из $G_\rho \subseteq V$ следует n_0-замкнутость класса $\mathfrak{L}$, и 1) доказано.

Очевидно $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi} \subseteq \mathfrak{L}$. Тогда $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi} \subseteq \mathfrak{F}\,\mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi} \subseteq \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi}$. Остается доказать $\mathfrak{L}\,\mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi} = \mathfrak{L}$. Пусть $G \in \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi}$. Тогда из $G/G_{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{S}_{\rho'}{}^{\pi}$ следует $G = G_{\mathfrak{L}}\, G_{\rho'}$. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Обозначим $K = G_{\mathfrak{L}}$ и $V^* = V \cap K$. Тогда $K = V^* K_{\rho'}$ и $G = K\, G_{\rho'} = V^*\, G_{\rho'}$. Отсюда $G = V\, G_{\rho'}$ и, следовательно, $G \in \mathfrak{L}$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть π – множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, удовлетворяющий условию (*). Тогда для любого множества простых чисел ρ из π классы $L_\rho(\mathfrak{F})$ и $L_{\rho'}(\mathfrak{F})$ тоже удовлетворяют условию (*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для множества ρ из π всякая π-разрешимая группа будет ρ-разрешимой, то задача сводится к доказательству выполнимости условия (*) для классов Фиттинга $L_\pi(\mathfrak{F})$ и $L_{\pi'}(\mathfrak{F})$.

1) Докажем выполнимость условия (*) для класса $L_\pi(\mathfrak{F})$. Обозначим $\mathfrak{L} = L_\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $G = WG_{\pi'}$, где W – нормальная $\mathfrak{L}$–подгруппа группы G. Тогда $W = VW_{\pi'}$, где V – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы W, и отсюда $G = VG_{\pi'}$. Пусть S – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая V. Так как $G = WG_{\pi'}$, то подгруппа S $\mathfrak{F}$-инъектирует любой нормальный ряд группы G, проходящий через W. Поэтому S будет $\mathfrak{F}$-инъектирующей подгруппой группы G, и так как $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), то по теореме 1 подгруппа S будет $\mathfrak{F}$-инъектором группы G. Теперь из $G = VG_{\pi'}$ и $V \subseteq S$ следует $G = SG_{\pi'} \in \mathfrak{L}$, и класс Фиттинга удовлетворяет условию (*).

2) Докажем выполнимость условия (*) для класса $L_{\pi'}(\mathfrak{F})$. Обозначим $\overline{\mathfrak{L}} = L_{\pi'}(\mathfrak{F})$. Пусть $G = WG_{\pi'}$, где W – нормальная $\overline{\mathfrak{L}}$-подгруппа группы G. Тогда $W = W_\pi V$, где V – некоторый $\mathfrak{F}$-инъектор из W. Пусть S – максимальная среди всех $\overline{\mathfrak{L}}$-подгрупп группы G, содержащих W. Из $S \in \overline{\mathfrak{L}}$ следует $S = W_\pi R = WR$, где R – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы S, причем R содержит $\mathfrak{F}$-инъектор из W. Из $\overline{\mathfrak{L}}$-максимальности подгруппы S в G следует, что подгруппа R должна быть максимальной в G среди всех $\mathfrak{F}$-подгрупп, содержащих $\mathfrak{F}$-инъектор из W. Так как $G = WG_{\pi'}$, то R будет $\mathfrak{F}$-инъектирующей подгруппой группы G, и, по теореме 1, $\mathfrak{F}$-инъектором группы G. Итак, всякая $\overline{\mathfrak{L}}$-максимальная подгруппа S группы G, содержащая W, имеет вид $S = WR$, где R – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Так как класс $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), то всякие два $\mathfrak{F}$-инъектора группы G сопряжены. Тогда сопряженными будут всякие две максимальные $\overline{\mathfrak{L}}$-подгруппы группы G, содержащие W. Итак класс $\overline{\mathfrak{L}}$ удовлетворяет условию (*).

Теорема доказана.

На множестве конечных разрешимых групп $\mathfrak{S}$ для множества простых чисел π и класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в [3] определен класс Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$ следующим образом: $K_\pi(\mathfrak{F}) = \{G \in \mathfrak{S} \mid \pi$-холловская подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}\}$. По аналогии введем такой класс на множестве конечных π–разрешимых групп. Пусть ρ – множество простых чисел такое, что либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Пусть $K_\rho(\mathfrak{F}) = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid \pi$-холловская подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}\}$.

Покажем, что $K_\rho(\mathfrak{F})$ будет классом Фиттинга. Пусть N – нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и $G \in K_\rho(\mathfrak{F})$. Тогда ρ-холловская подгруппа G_ρ группы G принадлежит $\mathfrak{F}$. Отсюда $G_\rho \cap N = N_\rho \in \mathfrak{F}$. Итак, класс $K_\rho(\mathfrak{F})$ S_n- замкнут.

Пусть теперь G = KN , где K и N – нормальные $K_\rho(\mathfrak{F})$-подгруппы группы G. Пусть K_ρ и N_ρ – ρ-холловские подгруппы соответственно из K и N. Тогда $K_\rho \in \mathfrak{F}$ и $N_\rho \in \mathfrak{F}$. Так как K_ρ и N_ρ $\mathfrak{F}$-подгруппы, нормальные в G_ρ, то $G_\rho = K_\rho N_\rho \in \mathfrak{F}$. Итак, класс $K_\rho(\mathfrak{F})$ – n_0-замкнут. Таким образом, для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $K_\rho(\mathfrak{F})$ тоже будет классом Фиттинга.

Лемма 5. *Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), то* $K_\rho(\mathfrak{F}) = L_\rho(\mathfrak{F}_\rho)$.

Доказательство. Если $G \in K_\rho(\mathfrak{F})$, то $G_\rho \in \mathfrak{F}$. Тогда из того, что $\mathfrak{F}_\rho$-инъектор F группы G содержится в G_ρ, следует $F = G_\rho$. Итак, $G \in L_\rho(\mathfrak{F}_\rho)$.

Обратно, если $G \in L_\rho(\mathfrak{F}_\rho)$, то $\mathfrak{F}_\rho$-инъектор F группы G содержит G_ρ. Так как F содержится в ρ-холловской подгруппе группы G, то $F = G_\rho$. Отсюда $G_\rho \in \mathfrak{F}$ и $G \in K_\rho(\mathfrak{F})$. Итак, $K_\rho(\mathfrak{F}) = L_\rho(\mathfrak{F}_\rho)$.

Лемма доказана.

Теперь, так как классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{E}_\rho$ удовлетворяют условию (*), то по теореме 3 из [2] класс $\mathfrak{F}_\rho = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_\rho$ – тоже. По теореме 4 $L_\rho(\mathfrak{F}_\rho) = K_\rho(\mathfrak{F})$ удовлетворяет условию (*).

Таким образом получено следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\rho \subseteq \pi$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, удовлетворяющий условию (*). Тогда классы Фиттинга $K_\rho(\mathfrak{F})$ и $K_{\rho'}(\mathfrak{F})$ тоже удовлетворяет условию (*).*

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, удовлетворяющий условию (*), и либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$. Тогда:*

1) $L_\rho(L_\rho(\mathfrak{F})) = L_\rho(\mathfrak{F})$;
2) *всякие два следующие свойства эквивалентны:*

a) $\mathfrak{F} = L_\rho(\mathfrak{F})$;
b) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\rho'}^{\pi}$;
c) *для любой группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$ $\mathfrak{F}$-инъектор группы G будет иметь ρ-индекс в G.*
d) $L_{\rho'}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}^\pi$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{L} = L_\rho(\mathfrak{F})$. Утверждение 1) докажем индукцией по порядку группы G. Предположим, что $\mathfrak{L} \neq L_\rho(\mathfrak{L})$. Так как по лемме 3. 2) $\mathfrak{L} \subseteq L_\rho(\mathfrak{L})$, то существует группа, содержащаяся в $L_\rho(\mathfrak{L})$ и не содержащаяся в $\mathfrak{L}$. Пусть G – группа наименьшего порядка среди всех таких групп и M – максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $M \in L_\rho(\mathfrak{L})$, то по индукции $M \in \mathfrak{L}$. Для заданного множества ρ группа G будет ρ-отделимой. Поэтому G/M будет либо ρ-группой, либо ρ'-группой. По теореме 4 в G существует $\mathfrak{L}$-инъектор L. Очевидно $M \subseteq L$. Пусть G/M – ρ-группа. Тогда $|G : L|$ – ρ-число. С другой стороны, так как $G \in L_\rho(\mathfrak{L})$, то L содержит некоторую ρ-холловскую подгруппу G_ρ. Тогда $|G : L|$ – ρ'-число. Из того, что $|G : L|$ одновременно ρ-число и ρ'-число следует $G = L \in \mathfrak{L}$.

Итак, G/M – ρ'-группа. Так как $M = G_\mathfrak{L}$, то $G \in \mathfrak{L}\mathfrak{S}_{\rho'}^{\pi}$. По лемме 3. 2) $L \in \mathfrak{L}$. В обоих случаях утверждение 1) доказано.

Докажем 2). Если выполняется условие a), то по 1) справедливо в). Индукцией по |G| докажем, что из в) следует c). Пусть M – максимальная нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. По индукции

$|M: (V \cap M)|$ будет ρ-числом. Если $G = VM$, то $|G : V| = |M: (V \cap M)|$ и тоже будет ρ-числом . Итак $V \subseteq M$. Ввиду пронормальности подгруппы V $G = MN_G(V)$ и $|G : N_G(V)| = |M : N_M (V)|$ будет ρ-числом. Отсюда $N_G(V)$ содержит ρ'-холловскую подгруппу $G_{\rho'}$ группы G. Тогда $V G_{\rho'} \in \mathfrak{F}\, \mathfrak{S}_{\rho'}^{\pi} = \mathfrak{F}$, и ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности подгруппы V, $V = V G_{\rho'}$. Итак $|G : V|$ – ρ-число. Так как с) справедливо для любой π-разрешимой группы, то из с) следует d).

Остается показать, что из d) следует а). Пусть $L_{\rho'}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}^{\pi}$ и $G \in L_\rho(\mathfrak{F})$. Так как $G \in L_{\rho'}(\mathfrak{F})$, то $|G : V|$ – ρ-число, а из $G \in L_\rho(\mathfrak{F})$ следует, что $|G : V|$ – ρ'-число. Отсюда $G = V$ и $G \in \mathfrak{F}$. Итак $\mathfrak{F} = L_\rho(\mathfrak{F})$, и а) доказано.

Теорема доказана.

По 1) предыдущей теоремы для класса $L_\rho(\mathfrak{F})$ выполняется условие а) , а из а) следует с). Поэтому справедливо утверждение.

Следствие. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), то $L_\rho(\mathfrak{F})$-инъектор группы $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ содержит ρ'-холловскую подгруппу группы G.

Лемма 8. *Пусть классы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию (*), $\sigma(\mathfrak{Y}) = \rho$ и либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$. Тогда во всякой π-разрешимой группе $G \in L_\rho(\mathfrak{X})$ множества $\mathfrak{X}$-инъекторов и $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъекторов группы G равны.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\mathfrak{X}$-инъектор X π-разрешимой группы G из $L_\rho(\mathfrak{X})$ будет $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальным в G. Предположим, что $X \subseteq H \subseteq G$ и $H \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Тогда $H/H_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi} \cap \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\rho^{\pi}$. Так как X является $\mathfrak{X}$-инъектором подгруппы H, то $|H : X|$ – ρ-число. С другой стороны $|G : X|$ делится на $|H : X|$ и так как $|G : X|$ – ρ'-число, то $|H : X|$ – тоже. Теперь $|H : X|$ одновременно ρ-число и ρ'-число. Отсюда $H = X$, и X – $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальна в G. Пусть K – субнормальная подгруппа группы G .Тогда $K \in L_\rho(\mathfrak{X})$ и $X \cap K$ – $\mathfrak{X}$ – инъектор подгруппы K. По доказанному выше $X \cap K$ – $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальна в K. Итак X – $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор группы G. По теореме 2 класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условию (*), а по теореме 1 всякие два $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектора группы G сопряжены. Тогда множества $\mathfrak{X}$-инъекторов и $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъекторов группы G совпадают, и лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*) и $G = LN$, где $L \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда, если $L \cap N$ – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы N, то L – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.*

Доказательство. Покажем, что L – $\mathfrak{F}$-максимальна в G. Предположим $L \subseteq S \in \mathfrak{F}$. Тогда $S = S \cap LN = L(S \cap N)$ и $L \cap N \subseteq S \cap N \in \mathfrak{F}$. Ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности $L \cap N$ в N получим $L \cap N = S \cap N$, а отсюда $S = L$. Пусть $L \supset L_1 \supset \ldots \supset L_K = L \cap N$ – цепочка нормальных в L подгрупп, факторы которой π-разложимы. Тогда факторы цепочки $G = LN \supset L_1N \supset \ldots \supset L_KN = N$ тоже π-разложимы. Дополним эту цепочку до нормального ряда группы G с π-разложимыми факторами $G = LN \supset L_1N \supset \ldots \supset N \supset N_1 \supset \ldots \supset N_S = 1$. Так как для любого $i = 1,2,\ldots,k$ подгруппа L_i $\mathfrak{F}$-максимальна в $L_i N$, то L $\mathfrak{F}$-инъектирует данный ряд. Тогда по теореме 1 L будет $\mathfrak{F}$-инъектором группы G. Лемма доказана.

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, удовлетворяющие условию (*), $\rho = \sigma(\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{L} = L_\rho(\mathfrak{X})$ и либо $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\rho$, либо $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{Y}$. Пусть G – π-разрешимая группа, X – $\mathfrak{X}$-инъектор подгруппы $G_{\mathfrak{L}}$, G_ρ – ρ-холловская подгруппа группы G, нормализующая X, и U/X – $\mathfrak{Y}$-инъектор подгруппы $G_\rho X/X$. Тогда:*

a) U – *$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор подгруппы* G;

b) $UG_{\mathfrak{L}} / G_{\mathfrak{L}}$ – *$\mathfrak{Y}$-инъектор группы* $G/ G_{\mathfrak{L}}$;

c) $X G_\rho$ – $\mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_\rho$ *-инъектор группы* G.

Доказательство. По лемме 8 X будет $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектором подгруппы $G_{\mathfrak{L}}$. Обозначим $R = G_{\mathfrak{L}}$. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi \times \mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс конечных π-разложимых групп и $T/R = (G/R)_{\mathfrak{H}}$. По лемме 3 b) $O_{\rho'}(G/R) = 1$. Тогда, если $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\rho$, то $T/R \in \mathfrak{N}_\rho$, если $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{Y}$, то $T/R \in \mathfrak{N}_{\pi \cap \rho} \times \mathfrak{E}_{\pi'}$. Итак, для всех возможных случаев $T/R \in \mathfrak{Y}$. Пусть $N = N_T(X)$. Тогда по лемме Фраттини $T = RN = R_{\rho'} N$. Отсюда N содержит некоторую ρ-холловскую подгруппу T_ρ из T. Так как $T_{\rho'} = N_{\rho'}$, то $T = RT_\rho$. Пусть $K = (X T_\rho)_{\mathfrak{X}}$. Докажем, что K = X. Так как X нормальна в XT_ρ, то $X \subseteq K$. Тогда $X \subseteq K \cap R \in \mathfrak{X}$ и, ввиду $\mathfrak{X}$–максимальности подгруппы X в R, получим $X = K \cap R$. По лемме 9 подгруппа K будет $\mathfrak{X}$-инъектором подгруппы KR , и так как $|KR : K| = |R : X|$ является ρ′-числом, то $KR \in \mathfrak{L}$. Кроме того, KR нормальна в $RT_\rho = T$. Итак, $X = (XT_\rho)_{\mathfrak{X}}$.

Докажем, что $XT_\rho \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, то есть что $T_\rho X/X \in \mathfrak{Y}$. Ввиду изоморфизма $(T_\rho \cap R)X/X \cong T_\rho \cap R / T_\rho \cap X$ получим, что $|(T_\rho \cap R) X : X| = |(T_\rho \cap R) : (T_\rho \cap X)|$ будет ρ-числом, которое является делителем ρ′-числа $|R : X|$. Отсюда $T_\rho \cap R = T_\rho \cap X$. Теперь из изоморфизма $T_\rho X/X \cong T_\rho / T_\rho \cap X = T_\rho / T_\rho \cap R \cong T_\rho R/R = T/R$, ввиду $T/R \in \mathfrak{Y}$, получим $XT_\rho \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, и так как $T = RT_\rho$, то по лемме 9 XT_ρ будет $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектором подгруппы T. По теореме 2 всякие два $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъекторы подгруппы группы G сопряжены. Поэтому найдется такой $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-инъектор F группы G, для которого $F \cap T = XT_\rho$. По лемме 10 из [4] $C_G (T/R) \subseteq T$. Тогда по лемме 1.20 из [3] $X = F_{\mathfrak{X}}$. Так как F/X – ρ-подгруппа, то F/X содержится в некоторой ρ-холловской подгруппе из $N_G (X) /X$. Так как $N_G (X)$ содержит ρ-холловскую подгруппу G_ρ группы G, то можно считать $F/X \subseteq G_\rho X/X$. Докажем, что F/X будет $\mathfrak{Y}$-инъектором группы $G_\rho X/X$. Для этого достаточно доказать, что F/X $\mathfrak{Y}$-инъектирует нормальный ряд $1 \subseteq T_\rho X/X = H_1/X \subseteq \ldots \subseteq H_n/X = G_\rho X/X$, факторы которого π-разложимы. Из $XT_\rho \subseteq F$ следует, что $F/X \cap H_1/X = T_\rho X/X$ будет $\mathfrak{Y}$-максимальной в H_1/X. Пусть для любого фиксированного i = 2,3,…,n S/X – $\mathfrak{Y}$-подгруппа из H_i/X , содержащая $F \cap H_i/X$. Тогда $XT_\rho \subseteq S \cap T \subseteq X G_\rho \cap T = X(G_\rho \cap T) = XT_\rho$. Отсюда $(S \cap T)_{\mathfrak{X}} = X$, и по лемме 1.20 из [3] $S_{\mathfrak{X}} = X$. Тогда $S \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Так как $F \cap H_i$ – $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-максимальна в H_i , то $F \cap H_i = S$. Тогда $F \cap H_i/X$ – $\mathfrak{Y}$-максимальна в H_i /X для любого i. По теореме 1 F/X – $\mathfrak{Y}$-инъектор группы $G_\rho X/X$, и a) доказано.

b) Так как $G_\rho \cap R = N_\rho \cap R = N_\rho \cap X$, то $G_\rho X \cap R = (G_\rho \cap R) X = X$. Тогда $G_\rho R/R = G_\rho XR/R \cong G_\rho X/ G_\rho X \cap R = G_\rho X/X$. При изоморфизме $G_\rho X/X \cong \cong G_\rho R/R$ образом $\mathfrak{Y}$-инъектора UX/X из $G_\rho X/X$ будет $\mathfrak{Y}$-инъектор UR/R из $G_\rho R/R$. При этом, ввиду сопряженности $\mathfrak{Y}$-инъекторов группы G/R, UR/R будет $\mathfrak{Y}$-инъектором подгруппы $G_\rho R/R$ тогда и только тогда , когда UR/R – $\mathfrak{Y}$-инъектор группы G/R. Итак , b) доказано.

c) При $\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}_\rho$ из a) следует, что XG_ρ будет $\mathfrak{X}\mathfrak{E}_\rho$ -инъектором группы G.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Lockett P.*** On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. // Math. Z. 131, 1973. P. 103-115.
2. ***Сементовский В.Г.*** Инъекторы конечных π-разрешимых групп для произведений и пересечений классов Фиттинга // Веснік ВДУ, 2002, № 1(23). С. 79-84.
3. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. Berlin–New–York, 1992. P. 564-574.
4. ***Сементовский В.Г.*** Δ-нильпотентные инъекторы конечных групп // Вопросы алгебры 1. Мн., 1985. С. 72-86.

S U M M A R Y

In this paper a well-known Lockett's result about injector of soluble groups structure for Fitting classes products is transferred to π-soluble groups.

Поступила в редакцию 20.02.2003