УДК 517

Ю.В. Трубников, В.В. Силивончик

Построение экстремальных полиномов для функции 1/z

Как известно ([1-4]), оптимальные итерационные параметры приближенного решения уравнения

$$Ax=b \qquad (1)$$

в банаховом пространстве являются коэффициентами экстремальных полиномов. Одним из методов построения экстремальных полиномов является метод, основанный на критерии А.Н. Колмогорова [1, с. 47]. Приведем типичный пример рассуждений, в котором применяется критерий Колмогорова.

Лемма 1. *Полиномом* $P(z)=1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ (2)

с минимальной чебышевской нормой $\|P\|=\max\limits_{z\in D}|P(z)|$ (3)

и условием $P(0)=1$, *заданным на круге* $D=\{z:|z-a|\le r,\ r\le|a|\}$, (4)

является полином $P_*(z)=\left(1-\dfrac{z}{a}\right)^n$. (5)

Доказательство. Задачу построения полинома P_* с минимальной нормой можно рассматривать как задачу нахождения ближайшего к единице элемента на множестве полиномов $Q(z)$ вида:

$$Q(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n,$$

тогда условие критерия Колмогорова примет вид

$$\min_{z\in E}\operatorname{Re}\left\{Q(z)\overline{[1-Q_*(z)]}\right\}\le 0,$$

где E – множество е–точек разности 1– $Q_*(z)$, т.е. точек, в которых выполняется равенство $\|1-Q_*\|=|1-Q_*(z)|$. Так как

$$\min_{z\in E}\operatorname{Re}\left\{Q(z)\overline{\left[1-Q_*(z)\right]}\right\}=\min_{z\in E}\operatorname{Re}\left\{Q(z)\overline{\left[\left(1-\frac{z}{a}\right)^n\right]}\right\}=$$

$$=\min_{z\in E}\operatorname{Re}\left\{Q(z)\overline{\left[\left(1-\frac{a+re^{i\varphi}}{a}\right)^n\right]}\right\}=\min_{z\in E}\operatorname{Re}\left\{Q(z)(-1)^n\frac{r^n}{a^n}e^{-i\varphi n}\right\},$$

то при обходе точкой z окружности

$$D_1 = \{z : |z - a| = r\}$$

в положительном направлении, аргумент множителя $e^{-i\varphi n}$ уменьшится на $2\pi n$, а аргумент произвольного полинома $Q(z)$ увеличится не больше чем на $2(n-1)\pi$, так как $Q(z)$ имеет внутри D не более $n-1$ корней. Но отсюда, в силу непрерывности произведения

$$Q(z)\overline{\left(1 - \frac{z}{a}\right)}^n$$

следует, что его действительная часть станет неположительной хотя бы в одной точке $z_0 \in E$, а для полинома (5) такими точками являются все точки множества D_1. ■

Однако, в случае если e–точками являются только некоторые точки границы области D, применение критерия Колмогорова затруднительно.

Рассмотрим далее задачу минимизации нормы функции $P(z) = \frac{1}{z} + c$ на двухточечном множестве $\{z_1, z_2\}$. В силу критерия Е.Я. Ремеза, В.К. Иванова [1, с. 56] для решения задачи минимизации достаточно показать разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1\left(\frac{1}{z_1} + c\right) + \lambda_2\left(\frac{1}{z_2} + c\right) = 0, \\ \left|\frac{1}{z_1} + c\right| = \left|\frac{1}{z_2} + c\right|, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы получаем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

тогда из первого уравнения

$$c = c_* = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = -\frac{z_1 + z_2}{2z_1z_2}. \tag{6}$$

Норма экстремального полинома определится равенством

$$\|P_*\| = \min_c \|P\| = \left\|\frac{1}{z} + c_*\right\| = \frac{1}{2}\left|\frac{z_2 - z_1}{z_1z_2}\right|. \tag{7}$$

Далее рассмотрим задачу минимизации нормы функции $P(z) = \frac{1}{z} + c$ на отрезке $[z_1, z_2]$, не содержащем нуля. Уравнение $\left|\frac{1}{z} + c\right| = r$, (8)

определяющее линию уровня, можно привести к виду

$$1+cz+\overline{cz}+\left(|c|^2-r^2\right)|z|^2=0. \tag{9}$$

В доказательстве следующей теоремы ключевую роль играет поведение линий уровня функции P.

Теорема 1. *При выполнении равенства* $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$ (10) *экстремальным полиномом является полином*

$$P_*(z)=\frac{1}{z}-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2},\quad \|P_*\|=\frac{1}{2}\left|\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}\right|. \tag{11}$$

Если $|z_1-z_2|>|z_1+z_2|$, (12)

то $P_*(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}$, $\quad\|P_*\|=\left|\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}\right|$. (13)

Если же $|z_1-z_2|<|z_1+z_2|$, (14)

то $P_*(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z_1+z_2}{2z_1z_2}$, $\quad\|P_*\|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{z_1-z_2}{z_1z_2}\right|$. (15)

Доказательство. Пусть выполнено условие (10). Уравнение линии уровня $\left|\dfrac{1}{z}+c\right|=r$ $\quad\left(c=-\dfrac{z_1+z_2}{2z_1z_2}\right)$ (16)

приводится в этом случае к виду

$$|z|^2-\frac{cz+\overline{cz}}{r^2-|c|^2}+\frac{|c|^2}{\left(r^2-|c|^2\right)^2}=\frac{r^2}{\left(r^2-|c|^2\right)^2}. \tag{17}$$

Уравнение (17) - это уравнение окружности с центром в точке $z_0=\dfrac{\overline{c}}{r^2-|c|^2}$

и радиусом $R=\dfrac{r}{r^2-|c|^2}$.

Случай выполнения равенства (10) - вырожденный, т.е. окружность (9) превращается в прямую $1+cz+\overline{cz}=0$. Из этого факта сразу же вытекает, что постоянная c определяется равенством (11). Последнее, в свою очередь, означает, что значение нормы $\|P_*\|$ на отрезке совпадает со значением нормы экстремального полинома, заданного на двухточечном множестве $\{z_1,z_2\}$.

Если выполнено равенство (12), то, взяв любые две точки ζ_1,ζ_2 отрезка $[z_1,z_2]$, для которых $|\zeta_1-\zeta_2|=|\zeta_1+\zeta_2|$ (такие точки существуют в силу условия (12)), построим экстремальный на отрезке $[\zeta_1,\zeta_2]$ полином, при этом

$$\min_{z\in[\zeta_1,\zeta_2]}\|P\|=\min_{z\in[z_1,z_2]}\|P\|.$$

Значение константы c найдем из условия, что линия уровня - прямая, проходящая через точки z_1 и z_2:

$$\left|\frac{1}{z_1}+c\right| = \left|\frac{1}{z_2}+c\right| = |c|.$$

Решая последнюю систему уравнений, получаем $c = \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2}$.

Если же выполнено условие (14), то для z внутри круга, ограниченного окружностью (17), выполняется неравенство $|P(z)| < |P(z_1)| = |P(z_2)|$. Поэтому $\min\limits_{[z_1,z_2]}\|P\| = \min\limits_{\{z_1,z_2\}}\|P\|$, и постоянная c определяется равенством (15).

Теорема доказана.

Далее рассмотрим следующий вопрос: для функции $f(z) = 1/z$, заданной на прямоугольнике D с вершинами в точках

$$z_1 = a+\delta+hi,\ z_2 = a-\delta+hi,\ z_3 = a-\delta-hi, z_4 = a+\delta-hi,\ 0<\delta<a,$$

найти постоянную c_*, для которой $q \equiv \left\|\frac{1}{z} - c_*\right\| = \min\limits_{c}\left\|\frac{1}{z} - c\right\|$.

Ответом на этот вопрос является

Теорема 2. *Если выполнены неравенства*

$$a > \delta + h; \qquad \delta^3 + a^2\delta + \delta h^2 \le 2a\delta^2 + 2ah^2, \tag{18}$$

то $c_* = \dfrac{a-\delta}{(a-\delta)^2 + h^2}, \quad q = \dfrac{h}{(a-\delta)^2 + h^2};$ (19)

если $a > \delta + h;\ \delta^3 + a^2\delta + \delta h^2 > 2a\delta^2 + 2ah^2,$ (20)

то $c_* = \dfrac{a}{a^2 - \delta^2 - h^2};\ q = \dfrac{\sqrt{\delta^2 + h^2}}{a^2 - \delta^2 - h^2};$ (21)

если $a \le \delta + h$, *то* $c_* = \dfrac{1}{2(a-\delta)},\ q = \dfrac{1}{2(a-\delta)}.$ (22)

Доказательство. Рассмотрим случай, когда выполнены неравенства (18). Экстремальным полиномом, построенным для двухточечного множества $M = \{z_1, z_2\}$, является полином $P_* = c_* = \dfrac{a-\delta}{(a-\delta)^2 + h^2}$.

Для нахождения P_* применялась формула (19') из [1, с. 72].

Изучим расположение линии уровня

$$\left|\frac{1}{z} - c_*\right|^2 = q^2 \equiv \frac{h^2}{\left[(a-\delta)^2 + h^2\right]^2}. \tag{23}$$

Для этого преобразуем равенство (23) следующим образом:

$$\left|\frac{x - iy}{x^2 + y^2} - c_*\right|^2 = q^2,$$

т.е. $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2} - c_*\right)^2 + \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)} = q^2$ и, следовательно,

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2c_*x}{x^2+y^2}+c_*^2=q^2. \qquad (24)$$

Так как в рассматриваемом случае $c_*^2-q^2\neq 0$, умножим обе части равенства (24) на $\frac{x^2+y^2}{c_*^2-q^2}$, тогда $x^2+y^2-\frac{2c_*x}{c_*^2-q^2}+\frac{1}{c_*^2-q^2}=0$.

Выделяя полный квадрат, получаем

$$x^2-\frac{2c_*x}{c_*^2-q^2}+\frac{c_*^2}{(c_*^2-q^2)^2}-\frac{c_*^2}{(c_*^2-q^2)^2}+y^2+\frac{1}{c_*^2-q^2}=0, \qquad (25)$$

Равенство (25) является уравнением окружности Γ с центром в точке с координатами $x_*=\frac{c_*}{c_*^2-q^2}=\frac{(a-\delta)\left[(a-\delta)^2+h^2\right]}{(a-\delta)^2-h^2}$, $y_*=0$ и радиусом $r_*=\frac{h\left[(a-\delta)^2+h^2\right]}{\left|(a-\delta)^2-h^2\right|}$.

Если $a-\delta>h$, то при условии, что прямоугольник D лежит в круге $\Gamma^0\bigcup\Gamma$, полином P_* будет экстремальным. Выясним, когда точка $t+hi$ попадет при движении вправо на окружность Γ. Это значение $t=t_*$ определится равенством $(t-x_*)^2+h^2=r_*^2$, т.е. $t_*=\frac{(a-\delta)\left[(a-\delta)^2+3h^2\right]}{(a-\delta)^2-h^2}$.

Неравенство $a+\delta\leq\frac{(a-\delta)\left[(a-\delta)^2+3h^2\right]}{(a-\delta)^2-h^2}$, т.е. условие $D\subseteq\Gamma^0\cup\Gamma$, совпадает со вторым из неравенств (18).

Далее рассмотрим случай, когда выполняются неравенства (20). В этом случае е-точками разности $\frac{1}{z}-c_*$, где c_* определяется первым из равенств (21), являются точки

$$z_1=a+\delta+hi,\ z_2=a-\delta+hi,\ z_3=a-\delta-hi,\ z_4=a+\delta-hi.$$

Построим функционал μ, гарантирующий [2, с.89; 3, с. 30] экстремальность разности $\frac{1}{z}-c_*$.

Пусть $\frac{1}{a+\delta+hi}-c_*=qe^{i\varphi}$, $\frac{1}{a-\delta+hi}-c_*=qe^{i\psi}$, тогда

$$\cos\varphi=\frac{1}{q}\left[\frac{a+\delta}{(a+\delta)^2+h^2}-\frac{a}{a^2-\delta^2-h^2}\right],$$

$$\cos\psi=\frac{1}{q}\left[\frac{a-\delta}{(a-\delta)^2+h^2}-\frac{a}{a^2-\delta^2-h^2}\right],$$

а система уравнений для нахождения коэффициентов функционала μ будет иметь вид $\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 1, \\ \rho_1 \cos\varphi + \rho_2 \cos\psi = 0. \end{cases}$ (26)

Если у системы (26) существует положительное решение ρ_1, ρ_2, то разность $\frac{1}{z} - c_*$ экстремальна. Так как $\cos\varphi < 0$ (это нетрудно проверить), то при выполнении условия $\cos\psi > 0$ система (26) имеет решение:

$$\rho_1 = \frac{\cos\psi}{\cos\psi - \cos\varphi} > 0, \quad \rho_2 = -\frac{\cos\varphi}{\cos\psi - \cos\varphi} > 0.$$

Неравенство $\cos\psi > 0$ эквивалентно неравенству:

$$\delta^3 + a^2\delta + \delta h^2 > 2a\delta^2 + 2ah^2.$$

Случай выполнения неравенства $a \le \delta + h$ является вырожденным. Если $a = \delta + h$, то уравнение (25) примет вид $\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2c_* x}{x^2 + y^2} = 0$, т.е. превратится в уравнение прямой $x = \frac{1}{2c_*} = a - \delta$, (27)

а любой прямоугольник, левая вертикальная сторона которого лежит на прямой (27), с условием $a - \delta \le h$ будет лежать в области $\left|\frac{1}{z} - c_*\right|^2 \le q$, причем $\left|\frac{1}{z} - c_*\right|^2 < q$, если $\operatorname{Re} z > a - \delta$ ∎

Рассмотрим применение полученных результатов для решения уравнения (1) с линейным оператором A в гильбертовом пространстве. Будем считать, что A и A^{-1} непрерывны. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$A^* A x = A^* b. \tag{28}$$

Оператор $B = A^* A$ самосопряженный и положительно определенный:

$$(A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|^2}(x, x),$$

$$(A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \le \|A\|^2 (x, x).$$

Таким образом, в неравенстве $m(x,x) \le (Bx, x) \le M(x,x)$ можно положить $m = \frac{1}{\|A^{-1}\|^2}, \quad M = \|A\|^2.$

Равенство (15), примененное к отрезку $[m, M]$, дает значение

$$c = \frac{m + M}{2mM}.$$

В случае, если оператор $B^{-1}+c$ является сжимающим, уравнение (28) эквивалентно уравнению

$$x=\left(B^{-1}+c\right)x+B^{-1}A^{*}b-(B^{-1}+c)B^{-1}A^{*}b. \qquad (29)$$

Из равенства (15) также следует, что спектральный радиус оператора $B^{-1}+c$ не превосходит постоянной $\frac{M-m}{2Mm}$. Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}=\left(B^{-1}+c\right)x_n+B^{-1}A^{*}b-(B^{-1}+c)B^{-1}A^{*}b\ \left(n=0,1,\ldots\right) \qquad (30)$$

Теорема 3. *При выполнении условия* $\frac{M-m}{2Mm}<1$ *итерационный процесс (30) сходится к решению* x_* *уравнения (1). Оценка скорости сходимости в некоторой эквивалентной норме* $\|\cdot\|_\varepsilon$ *характеризуется неравенством*

$$\|x_n-x_*\|_\varepsilon\le\left(\frac{M-m}{2Mm}+\varepsilon\right)^n\|x_0-x_*\|_\varepsilon.$$

Доказательство следует из возможности [5] построить такую эквивалентную норму в произвольном банаховом пространстве, при которой норма линейного оператора A сколь угодно близка к его спектральному радиусу.

Заметим, что при выполнении условия $\frac{M-m}{2Mm}+\varepsilon<\frac{M-m}{M+m}$, сходимость последовательных приближений, полученных из равенства (30), является более быстрой по сравнению с α-процессами [5, с. 114].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Дзядык В.К.*** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977. – 511 с.
2. ***Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.*** Теория экстремальных задач. М., 1974. 480 с.
3. ***Трубников Ю.В.*** Оптимальные итерационные процессы второго порядка // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2000, № 3. С. 30-34.
4. ***Трубников Ю.В.*** Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями. Москва, 2002. – 256 с.
5. ***Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.*** Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. С. 15.

SUMMARY

It is known that optimal iteration parameters appear to be coefficients of some extremal polynomials. One of the main methods of constructing of the extremal polynomials is method that is based on criterion of A.N. Kolmogorov. However, as the authors show, it is difficult to apply the criterion in a number of cases.

Offered by the authors of the article new method is based on analysis of behavior of the level curves of the functions under consideration with further applying of the optimization criteria. As an application of the results obtained convergence of the iterative process for operator equations in Hilbert space is determining. Also the estimation of the convergence speed is proved.

Поступила в редакцию 21.04.2003