УДК 51(07)

В.В. Малиновский

О некоторых особенностях системы математических упражнений для самостоятельной работы школьников

Современные школьные программы по математике предусматривают значительное сокращение числа учебных часов по этому предмету. Четыре часа математики недельной нагрузки в общеобразовательных классах и три – в гуманитарных означают для современных школьников почти 50% сокращение учебного времени для учеников выпускных классов школы по сравнению с учебным планом школы, по которому учились их родители. При этом предполагается, что ученики, желающие изучать математику на более фундаментальном уровне, выберут для себя соответствующие профили обучения. В то же время, ученики гуманитарных классов не могут быть уверены, что математика им совсем уж не понадобится, хотя бы для поступления в вузы, где вступительные экзамены проводятся по программам более соответствующим профильному обучению математике, чем гуманитарному. В [1] подробно рассмотрены причины, аналогичные приведенной, по которым описанная ситуация не является гуманной по отношению к ученикам. Появление в рамках профильной дифференциации образований вида англо-математических и т.п. классов не решает проблемы, т.к. по своей сути профильная дифференциация является экстенсивным путем достижения необходимого уровня математических знаний. В указанной ранее работе обоснована необходимость единства профильной и уровневой дифференциаций при ведущей роли уровневой. При этом уровневая дифференциация, когда ученик сам или с некоторой помощью учителя достигает результата, отличного от результата всей оставшейся учебной группы, по своей сути предполагает самостоятельную работу ученика. Отметим, что в настоящее время и уровневая дифференциация, и самостоятельная работа учеников являются фактически личным делом учителя, могу и хочу – осуществляю и организую их, не могу или не хочу – не делаю этого. Естественно, такая ситуация не может приветствоваться ни учениками, ни их родителями.

Одним из вариантов создания ситуации, когда уровневая дифференциация в обучении из личного дела учителя становится обязательным элементом обучения является применение уровневых учебных материалов в процессе обучения. Такие материалы изначально ориентированы на самостоятельную работу учеников.

Далее в соответствии с [2] под самостоятельной работой учащихся будем понимать «такую работу, которая выполняется без непосредственного участия учителя, но по его заданию в специально предоставленное для этого время, при этом учащийся сознательно стремится достигнуть поставленной в задании цели, проявляя свои усилия и выражая в той или иной форме результаты своих умственных и физических (или тех и других вместе) действий».

В настоящее время в школе достаточно часто происходит смешивание понятий – самостоятельная работа и проверочная работа. Однако понятия эти разные: проверочная работа по своей сути должна быть самостоятельной, а вот самостоятельная работа учеников не обязательно должна быть проверочной (а значит и не обязательно должна проверяться с выставлением оценки).

Следует разделять истинно самостоятельную работу и квазисамостоятельную работу школьников. К истинно самостоятельной работе следует отнести такую работу, когда, в соответствии с определением этого понятия, ученик, получив задание, все этапы его выполнения пройдет индивидуально, включая и этап интерпретации полученных результатов, выяснения правильности выполненного решения. Таковыми можно считать контрольные и проверочные работы, выполнение домашнего задания. Все прочие виды «самостоятельной» работы учеников следует отнести к квазисамостоятельным, т.к. ни изучение нового материала, ни выработка навыков выполнения стандартных заданий и т.п. не может быть проведена школьниками, поскольку такая работа изначально планируется к выполнению под руководством учителя. Даже если ученик изучает фрагменты некоторого материала «самостоятельно», то он все равно вынужден обратиться к учителю для корректировки полученного им результата.

При изучении материала под руководством учителя может оказаться, что ученик на разных этапах этого процесса проходит через стадию неверно выполненных заданий, неверной трактовки теоретических вопросов. При этом именно учитель, формируя систему упражнений для выполнения их учениками класса и контролируя этот процесс на всех его этапах, фактически является ответственным за то, чтобы ученик уже на этапе получения знаний был спровоцирован на совершение всего спектра возможных для данных заданий ошибок. Самостоятельно, без ошибок, без вмешательства учителя выполнить все это сможет лишь часть учащихся. Имея в современных учебниках лишь образцы только верно выполненных заданий, ученик может и не подозревать о типичных ошибках, которые он допускает. При этом современный ученик ответственность за правильность выполненного задания возлагает либо на учителя, который проверяет его работу, либо, в крайнем случае, на авторов учебника, которые привели ответ для данного задания. Отметим, что такая ситуация приводит к тому, что нынешний школьник, с одной стороны, не умеет самостоятельно оценить правильность выполненного задания (разве что, на уровне – решил еще раз и получил другой ответ), а, с другой стороны, не умеет искать ошибки в своих «решениях».

Для того, чтобы ученик мог самостоятельно изучить некоторый материал и при этом быть уверенным в правильности применения освоенных при этом методов выполнения заданий, этап прохождения через возможные ошибки, который в настоящее время возложен на учителя, необходимо ввести в учебники. Указанное можно достигнуть введением в учебники следующих групп заданий.

Первая группа заданий должна состоять из заданий, которые будут охватывать весь спектр возможных технических ошибок и могут состоять из блока, содержащего три вида упражнений: а) исправь ошибку; б) есть ли ошибка? в) выполни указанное задание. Приведем пример такого блока. (Тема «Квадратичная функция»).

Найди ошибку в решении, исправь ее:

а) $x^2+4x+6=x^2+2x\cdot 2+6=(x+2)^2+6$;

б) $x^2+3x+4=x^2+2x\cdot 1+1-1+4=(x+1)^2+3$;

в) $x^2+2x+2=x^2+2x\cdot 1+1-1+2=(x+1)^2+2$;

г) $x^2-6x+4=x^2-2x\cdot 3+9-9+4=(x+3)^2-5$.

Есть ли ошибка в решении? Исправь ее:

а) $x^2+3x+2=x^2+2x\cdot 1{,}5+2{,}25-2{,}25+2=(x+1{,}5)^2-0{,}25$;

б) $x^2+8x+4=x^2+2x\cdot 4+16-16+4=(x-4)^2-12$;

в) $x^2+6x-3=x^2+2x\cdot 3+9-9-3=(x-3)^2-12$;

г) $x^2-5x-4=x^2-2x\cdot 2{,}5+6{,}25-4=(x+2{,}5)^2-4$.

Выдели полный квадрат двучлена:

а) $x^2+4x+3=\ldots$;	г) $x^2+6x-2=\ldots$;
б) $x^2-4x+3=\ldots$;	д) $x^2+5x-4=\ldots$;
в) $x^2-6x+2=\ldots$;	е) $x^2-7x-3=\ldots$.

Укажем, что задания а) блока должны содержать весь спектр ошибок, возможных для данного типа упражнений. Задания в) блока должны содержать как упражнения, выполненные неверно, так и задания, выполненные без ошибок. Такому блоку заданий должны предшествовать задания, где ученик только заполняет пропуски в решении, которые оказываются на наиболее «опасных» участках. При этом такое задание позволит ученику одновременно и контролировать себя. Приведем пример таких заданий.

Заполни пропуски:

а) $x^2+8x+10=x^2+2x\cdot\ldots+16-\ldots+10=(x+\ldots)^2-6$;

б) $x^2+6x-4=x^2\ldots 2x\cdot\ldots+9-9-\ldots=(x+\ldots)^2-\ldots$;

в) $x^2-2x+3=x^2\ldots 2x\cdot\ldots+\ldots-1+3=(x\ldots 1)^2+2$;

г) $x^2-10x+2=x^2-2x\cdot 5+\ldots-\ldots+2=(x-5)^2-\ldots$;

д) $x^2-12x-10=x^2-2x\cdot\ldots+36-\ldots-10=(x-\ldots)^2-\ldots$.

На более поздних этапах, когда ученики привыкнут к заданиям подобного типа можно вводить следующий вид заданий, связанных не только с отработкой навыков решения некоторых упражнений, но и с получением новых для ученика знаний. Приведем пример.

Найди ошибку (если она есть) в нахождении производной функции $y=tgx$ и запиши верное значение производной указанной функции в рамку.

$$tgx=\frac{sinx}{cosx} \qquad \boxed{\quad tg'x= \quad}$$

Функция tgx является частным двух функций, поэтому применим правило нахождение производной частного двух функций.

Решение № 1

$$tg^{\copyright}x=\left(\frac{sinx}{cosx}\right)^{\copyright}=\frac{sin^{\copyright}x\cdot cosx+cos^{\copyright}x\cdot sinx}{cos^2x}=\frac{cosx\cdot cosx+(-sinx)\cdot sinx}{cos^2x}=$$

$$=\frac{cos^2x-sin^2x}{cos^2x}=\frac{cos^2x}{cos^2x}-\frac{sin^2x}{cos^2x}=1-tg^2x.$$

Решение № 2

$$tg^{\copyright}x=\left(\frac{sinx}{cosx}\right)^{\copyright}=\frac{sin^{\copyright}x\cdot cosx-cos^{\copyright}x\cdot sinx}{cos^2x}=\frac{cosx\cdot cosx+(-sinx)\cdot sinx}{cos^2x}=$$

$$=\frac{cos^2x-sin^2x}{cos^2x}=\frac{cos^2x}{cos^2x}-\frac{sin^2x}{cos^2x}=1-tg^2x.$$

Решение № 3

$$tg^{\copyright}x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\copyright}=\frac{\sin^{\copyright}x\cdot\cos x-\cos^{\copyright}x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+tg^2x$$

Решение № 4

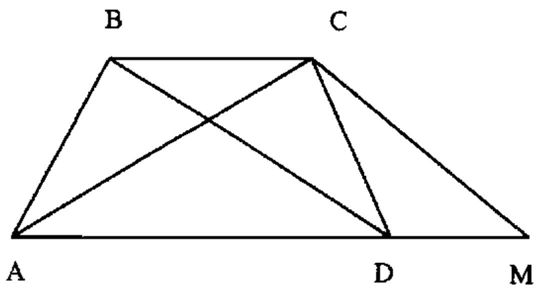
$$tg^{\copyright}x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\copyright}=\frac{\sin^{\copyright}x\cdot\cos x-\cos^{\copyright}x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Приведенные упражнения направлены на выработку навыков самоконтроля при выполнении заданий, но при этом вырабатывается навык поиска только технических ошибок в решении. Для выработки навыков поиска логических ошибок требуется введение в учебники заданий, когда имеется несколько «решений», не содержащих технических ошибок, но при этом очевидно, что некоторые из них неверны. Приведем пример такого задания.

АВСД – трапеция с основанием АД и диагоналями ВД и АС. Известно, что АС=3; ВД=4 и $\angle САД=2\cdot\angle ВДА$. Найти площадь трапеции АВСД.

Решение 1



Достроим данную трапецию АВСД. Проведем СМ| | ВД

$\angle САД=2\cdot\angle ВДА=2\cdot\angle СМА$

Получаем, $\angle ВДА=\angle СМА=x;\quad \angle САД=2x;$

$\angle АСМ=180^0-3x$

Очевидно, $S_{трап}=S_{треуг}$

$$S_{трап}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\sin\left(180^0-3x\right)=6\sin 3x\,;\quad h=3\sin 2x;\qquad h=3\sin x$$

Тогда получаем $3\sin 2x=4\sin x$

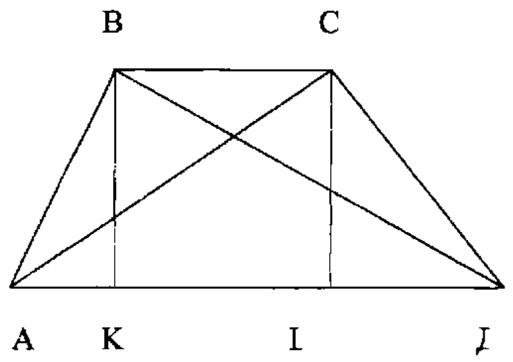
$\sin x\neq 0.\qquad \cos x=\frac{2}{3};\ \ Тогда,\ \sin x=\frac{\sqrt5}{3}.$

Получаем, $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x=\frac{7\sqrt5}{27}.$

Тогда $\quad S=6\cdot\frac{7\sqrt5}{27}=\frac{14\sqrt5}{9}.$

Ответ: $\frac{14\sqrt5}{9}$.

Решение 2.



Пусть $\angle САД = 2\alpha$; $\angle ВДА = \alpha$. BK=CL=$H_{трап.}$

Поскольку BC=KL, то $\frac{BC + АД}{2} = \frac{AL + КД}{2}$.

CL = AC sinα; BK = BD sin2α; получаем AC sin2α = BD sinα. Откуда cos α = $\frac{2}{3}$.

Тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Получаем $BK = 4\sin\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

По теореме Пифагора будем иметь:

$$КД = \sqrt{ВД^2 - BK^2} = \sqrt{16 - \frac{16\cdot 5}{9}} = \frac{8}{3}; \quad AL = \sqrt{AC^2 - CL^2} = \sqrt{9 - \frac{16\cdot 5}{9}} = \frac{1}{3};$$

Имеем $S_{трап} = \frac{AL + KD}{2}\cdot BK = \frac{\frac{8}{3} + \frac{1}{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Отметим, что если задания, направленные на поиск технических ошибок, можно и нужно рекомендовать всем ученикам, то задания, направленные на поиск логических ошибок, являясь достаточно сложными, могут быть рекомендованы лишь части наиболее подготовленных учеников.

Введение в учебник упражнений указанных видов позволит выработать у учеников навык самоконтроля при выполнении математических заданий.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Семенов Е.Е., Малиновский В.В.*** Дифференцированное обучение математике с позиций гуманизма // Математика в школе, 1991, № 6. С. 3-6.
2. ***Харламов И.Ф.*** Как активизировать учение школьников. (Дидактические очерки). 2-е изд., перераб. и доп. Минск., 1975. – 208 с.

S U M M A R Y

The article deals with organization possibilities of individualized to the highest extend students independent work at math classes and at home on the principle of unite of professionally-oriented and leveled differentiation with the leading role of the lattes. Different type of exercises assisting this aim' s achievement are included.

Поступила в редакцию 17.09.2003