УДК 621.3.049.73.75:001.2(024)

А.С. Шандриков

Алгоритм разрезания графа методом последовательного назначения вершин в формируемые куски

На ранних этапах конструкторского проектирования радиоэлектронных средств (РЭС) решается задача компоновки – разбиения принципиальной электрической схемы на отдельные конструктивно законченные части. Решение этой задачи моделируется разрезанием графа $G = (X, U)$, где X – множество вершин, обозначающих радиоэлектронные компоненты (РЭК), U – множество ребер, соединяющих вершины графа в соответствии с принципиальной электрической схемой [1, 2].

Основным критерием качественного разрезания графа является минимальное количество внешних связей, т.е. ребер, соединяющих вершины, принадлежащие разным кускам графа, или максимальное значение коэффициента разрезания, вычисляемого по формуле

$$\Delta(G) = L/K, \tag{1}$$

где L – суммарное количество внутренних связей, K – количество внешних связей.

Разрезание графа на куски является задачей комбинаторно-логического типа. Минимизация внешних связей может быть достигнута полным перебором всех возможных вариантов заданного разрезания и последующим выбором оптимального, однако такой путь чрезвычайно затруднителен даже для современных ЭВМ, и по этой причине для проектирования РЭС неприемлем.

Для разрезания графа на куски разработан ряд алгоритмов, обеспечивающих удовлетворительный с точки зрения практики результат. Наиболее часто используются последовательные и итерационные алгоритмы.

Последовательные алгоритмы являются наиболее простыми и быстрыми в реализации, однако они практически никогда не позволяют получить оптимальный результат [1, с. 61].

Наиболее эффективным по критерию минимума внешних связей является итерационный матричный алгоритм [2, с. 62–78]. Существенным недостатком данного алгоритма, ограничивающим его применение, является большое количество обрабатываемых матриц (до семи на одну итерацию). Для получения требуемого результата при разрезании графа, например, на l кусков с одинаковым количеством вершин, необходимо выполнить

$$c = \frac{n!}{\left(\frac{n}{l!}\right)^{l} \cdot l!} \tag{2}$$

подстановок. Сложившаяся ситуация требует разработки таких алгоритмов, которые были бы просты в реализации как последовательные и эффективны как итерационный матричный алгоритм.

Ниже описывается один из таких алгоритмов, разработанный автором, суть которого заключается в следующем [3].

Куски заданного разрезания графа формируются последовательно поэтапным назначением вершин. На каждом этапе в формируемый кусок назначается одна вершина. Затем строится множество вершин, смежных только что назначенной вершине, и из него выбирается следующая вершина. Критерием выбора очередной назначаемой вершины является минимум приращения внешних связей, вносимых вершиной в формируемый кусок. Данная процедура продолжается до окончания формирования куска, после чего из исходного графа удаляются вершины, вошедшие в сформированный кусок, и начинается процесс формирования следующего куска.

Кроме описанного принципа формирования куска данный алгоритм предусматривает более гибкий подход к разрезанию графа на неравные по количеству вершин куски. При разрезании графа G, например, на три куска по 3, 4 и

5 вершин, формирование первого куска в классических последовательных алгоритмах заканчивается при выполнении условия $|X_1| = 3$, второго – при $|X_2| = 4$ и третий кусок формируется автоматически из оставшегося множества вершин $X_3 = X\backslash(X_1+X_2)$. В описываемом алгоритме с целью минимизации внешних связей непосредственно в процессе разрезания графа выполнение условия $|X_1| = 3$ воспринимается не как окончание формирования первого куска, а только как один из возможных его вариантов. Назначение вершин в первый кусок будет продолжено с тем, чтобы получить и проанализировать все остальные варианты, т.е. $|X_1| = 5$ и $|X_1| = 7$. В результате анализа из трех полученных вариантов выбирается наилучший. Критерием для выбора окончательного варианта первого куска будет служить максимум коэффициента разрезания графа $\Delta(G)$. Используя аналогичный подход к формированию второго и третьего кусков, можно получить иной результат разрезания графа, например, $|X_1| = 5$, $|X_2| = 7$ и $|X_3| = 3$. Такой подход к формированию кусков обеспечивает минимизацию внешних связей непосредственно в процессе разрезания графа. Формально приведенный результат отличается от заданного, но **принципиально** не имеет значения, какой именно кусок содержит то или иное заданное количество вершин, то есть принципиально полученный результат удовлетворяет заданным требованиям. Отличие полученного результата от заданного разрезания заключается только в изменении номеров (индексов) сформированных кусков.

Сформулируем теперь алгоритм последовательного назначения вершин в формируемые куски.

Шаг 1. Построить матрицу смежности и определить локальную степень $\rho(x_i)$ каждой вершины графа. Перейти на шаг 2.

Шаг 2. Выбрать вершину x_i, удовлетворяющую условию

$$\rho(x_i) = \min \rho(x_i). \tag{3}$$

При наличии нескольких вершин с одинаковым минимальным значением локальной степени выбрать вершину с большим количеством петель или инцидентных ей кратных ребер.

Если несколько вершин имеют одинаковое количество петель или инцидентных им кратных ребер, или ни одна из вершин не имеет ни петель, ни кратных ребер, то для однозначности выбора при автоматизированном решении задачи в качестве критерия следует использовать младший (или старший) индекс строки (столбца) матрицы смежности. Перейти на шаг 3.

Шаг 3. Назначить выбранную вершину в множество X_k вершин формируемого куска G_k. Перейти на шаг 4.

Шаг 4. Определить мощность полученного множества вершин, назначенных в формируемый кусок.

Если граф разрезается на равные по количеству вершин куски, то перейти на шаг 5, иначе – на шаг 6.

Шаг 5. Если $|X_k| = n_i$, где n_i – количество вершин, входящих в формируемый кусок, то перейти на шаг 13.

Если $|X_k| < n_i$, то перейти на шаг 8.

Шаг 6. Если $|X_k| = m$, где m – количество вершин, входящих в минимальный на данный момент кусок заданного разрезания, то перейти на шаг 7.

Если $|X_k| < m$, то перейти на шаг 8.

Шаг 7. Определить коэффициент разрезания графа по формуле (2). Полученное значение $\Delta(G)$ зафиксировать.

Если сформированный кусок представляет собой последний из возможных вариантов, то перейти на шаг 12, иначе – на шаг 8.

Шаг 8. Построить множество вершин, содержащее выбранную на шаге 2 вершину x_i и все смежные ей вершины. В результате будет получено множество

$$\Gamma x_i = \{x_i, x_j, \ldots, x_n\}. \qquad (4)$$

Перейти на шаг 9.

Шаг 9. Объединить множества X_k и Γx_i. В результате будет получено множество

$$X_k \cup \Gamma x_i. \qquad (5)$$

Перейти на шаг 10.

Шаг 10. Для каждой вершины множества $\Gamma x_i \backslash X_k$ определить коэффициент связности по формуле

$$\delta(x_j) = \rho(x_j) - z(x_j) = \min \delta(x_j), \qquad (6)$$

где $z(x_j)$ – количество ребер, связывающих вершину x_j со всеми вершинами множества X_k, назначенными в формируемый кусок. Перейти на шаг 11.

Шаг 11. Из множества $\Gamma x_i \backslash X_k$ выбрать вершину, удовлетворяющую условию

$$\delta(x_j) = \min \delta(x_j). \qquad (7)$$

Если условию (7) удовлетворяют несколько вершин, то выбрать следует вершину с минимальной локальной степенью, а при равенстве значений локальных степеней – младшему (или старшему) индексу строки (или столбца) матрицы смежности. Перейти на шаг 12.

Шаг 12. Из полученных вариантов сформированного куска, отличающихся количеством вершин, выбрать тот, который удовлетворяет условию

$$\Delta(G) = \max \Delta(G). \qquad (8)$$

На этом формирование куска следует считать законченным. Перейти на шаг 13.

Шаг 13. Если сформированный кусок является предпоследним куском заданного разрезания, то перейти на шаг 15, иначе – на шаг 14.

Шаг 14. Удалить из матрицы смежности строки и столбцы, соответствующие вершинам, назначенным в сформированный кусок G_k. Перейти на шаг 15.

Шаг 15. Вывод результатов полученного разрезания графа. Перейти на шаг 16.

Шаг 16. Конец работы алгоритма.

Реализацию описанного алгоритма рассмотрим на следующем примере.

На рис. 1 представлен граф $G = (X, U)$, у которого $|X| = 12$, $|U| = 28$. Требуется разрезать этот граф на 3 куска G_1, G_2 и G_3 с количеством вершин 4, 3 и 5 соответственно. Какие-либо ограничения по закреплению некоторых вершин за определенными кусками отсутствуют.

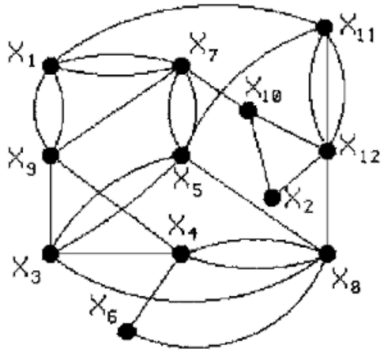

Рис. 1.

Решение.

1. Построить матрицу смежности R и определить локальную степень $\rho(x_i)$ каждой вершины. Значения $\rho(x_i)$ указаны в дополнительном столбце матрицы смежности.

$R=$ (9)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	$\rho(x_i)$
x_1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	5
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2
x_3	0	0	0	1	2	0	0	1	1	0	0	0	5
x_4	0	0	1	0	0	1	0	2	1	0	0	0	5
x_5	0	0	2	0	0	0	2	1	0	0	1	0	6
x_6	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
x_7	2	0	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	6
x_8	0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	1	6
x_9	2	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	5
x_{10}	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	3
x_{11}	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	5
x_{12}	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	3	0	6

2. Выбрать вершину x_i с минимальной локальной степенью. Таких вершин две: x_2 и x_6, у которых $\rho(x_i)$ = min = 2. Эти вершины не имеют петель и кратных рёбер, поэтому выбираем в качестве начальной вершины первого куска, например, вершину x_2 как имеющую младший индекс, и в результате получим одноэлементное множество $X_1^{(1)} = \{x_2\}$.

3. Построить множество вершин, смежных начальной вершине x_2:

$$\Gamma x_2 = \{x_2, x_{10}, x_{12}\}. \qquad (10)$$

4. Объединить множества Γx_2 и $X_1^{(1)}$:

$$\Gamma x_2 \cup X_1^{(1)} = \{x_2, x_{10}, x_{12}\}. \qquad (11)$$

5. Для вершин x_{10} и x_{12} определить коэффициенты связности:

$$\delta(x_{10}) = \rho(x_{10}) - z(x_{10}) = 3 - 1 = 2; \ \delta(x_{12}) = \rho(x_{12}) - z(x_{12}) = 6 - 1 = 5. \qquad (12)$$

6. Назначить в формируемый кусок вершину x_{10} как вносящую минимальное количество внешних связей в формируемый кусок. В результате получим двухэлементное множество $X_1^{(2)} = \{x_2, x_{10}\}$.

7. Так как $|X_1^{(2)}|$ меньше минимальной заданной, то следует продолжить назначение вершин в формируемый кусок. Для этого необходимо построить множество вершин, смежных вершине x_{10}:

$$\Gamma x_{10} = \{x_{10}, x_2, x_7, x_{12}\}. \tag{13}$$

8. Объединить множества $X^{(2)}$ и Γx_{10}:

$$X_1^{(2)} \cup \Gamma x_{10} = \{x_2, x_{10}, x_7, x_{12}\}. \tag{14}$$

9. Для каждой вершины множества $\Gamma x_{10} \setminus X_1^{(2)}$ определить коэффициент связности:

$$\delta(x_7) = \rho(x_7) - z(x_7) = 6 - 1 = 5;\ \delta(x_{12}) = \rho(x_{12}) - z(x_{12}) = 6 - 2 = 4. \tag{15}$$

10. Назначить вершину x_{12} в формируемый кусок. В результате будет получено множество

$$X_1^{(3)} = \{x_2, x_{10}, x_{12}\}. \tag{16}$$

11. Мощность полученного множества

$$|X_1^{(3)}| = n_{\min} = n_2 = 3, \tag{17}$$

т.е. соответствует мощности множества вершин, входящих в наименьший кусок G_2 заданного разрезания.

12. По формуле (2) определить коэффициент полученного разрезания

$$\Delta_1^{(1)}(G) = \Sigma L_1^{(1)}/K_1^{(1)} = 3/8 = 0{,}375, \tag{18}$$

где $\Sigma L_1^{(1)} = [z(x_2) + z(x_{10}) + z(x_{12})]/2 = (2 + 2 + 2)/2 = 3$;

$$K_1^{(1)} = \sum \rho(x_1) - \sum z_1^{(1)} = (2 + 3 + 6) - 3 = 11 - 3 = 8.$$

13. Сформировать следующий вариант куска G_1, дополнив множество $X_1^{(3)}$ вершинами до значения его мощности, равного $n_1 = 4$. Для этого следует построить множество Γx_{12}, содержащее вершину x_{12} и все смежные ей вершины:

$$\Gamma x_{12} = \{x_{12}, x_2, x_8, x_{10}, x_{11}\}. \tag{19}$$

14. Объединить множества $X_1^{(3)}$ и Γx_{12}:

$$X_1^{(3)} \cup \Gamma x_{12} = \{x_2, x_{10}, x_{12}\, x_7,\}. \tag{20}$$

15. Для каждой вершины множества $\Gamma x_{12} \setminus X_1^{(3)}$ определить приращение внешних связей:

$$\delta(x_8) = \rho(x_8) - z(x_8) = 6 - 1 = 5;\ \delta(x_{11}) = \rho(x_{11}) - z(x_{11}) = 5 - 3 = 2. \tag{21}$$

16. Назначить вершину x_{11} в формируемый кусок. В результате будет получено множество

$$X_1^{(4)} = \{x_2, x_{10}, x_{12}, x_{11}\}. \qquad (22)$$

17. Мощность полученного множества

$$|X_1^{(4)}| = n_1 = 4, \qquad (23)$$

что соответствует мощности множества вершин, входящих в кусок G_1 заданного разрезания.

18. По формуле (2) определить коэффициент полученного разрезания

$$\Delta_1^{(2)}(G) = \Sigma L_1^{(2)}/K_1^{(2)} = 6/10 = 0,6. \qquad (24)$$

19. Дополнить множество $X_1^{(4)}$ вершинами до значения его мощности, равного $n_3 = 5$. Для этого следует построить множество Γx_{11}, содержащее вершину x_{11} и все смежные ей вершины:

$$\Gamma x_{11} = \{x_{11}, x_1, x_5, x_{12}\}. \qquad (25)$$

20. Объединить множества $X_1^{(4)}$ и Γx_{11}:

$$X_1^{(4)} \cup \Gamma x_{11} = \{x_2, x_{10}, x_{12}, x_{11}, x_1, x_5\}. \qquad (26)$$

21. Для каждой вершины множества $\Gamma x_{11} \backslash X_1^{(4)}$ определить коэффициент связности:

$$\delta(x_1) = \rho(x_1) - z(x_1) = 5 - 1 = 4;\ \delta(x_5) = \rho(x_5) - z(x_5) = 6 - 1 = 5. \qquad (27)$$

22. Назначить вершину x_1 в формируемый кусок. В результате будет получено множество

$$X_1^{(5)} = \{x_2, x_{10}, x_{12}, x_{11}, x_1\}. \qquad (28)$$

23. Мощность полученного множества

$$|X_1^{(5)}| = n_3 = 5, \qquad (29)$$

что соответствует мощности множества вершин, входящих в третий кусок заданного разрезания.

24. По формуле (2) определить коэффициент полученного разрезания

$$\Delta_1^{(3)}(G) = \Sigma L_1^{(3)}/K_1^{(3)} = 7/14 = 0,5. \qquad (30)$$

25. В результате выполненных действий было получено три варианта куска G_1. Из полученных вариантов следует выбрать тот, который имеет максимальный коэффициент разрезания. Таким вариантом является второй вариант, для которого $\Delta_1^{(2)}(G) = 0,6 = \max$. Окончательно сформированным следует считать кусок G_1, в который входит множество вершин $X_1 = \{x_2, x_{10}, x_{12}, x_{11}\}$.

26. Удалить из исходной матрицы смежности (9) строки и столбцы x_2, x_{10}, x_{12}, x_{11}.

27. Аналогичным образом формируется второй кусок графа. При этом рассматриваются варианты $|X_2| = 3$ и $|X_2| = 5$. В результате выполненных действий было получено разрезание, представленное на рис. 2.

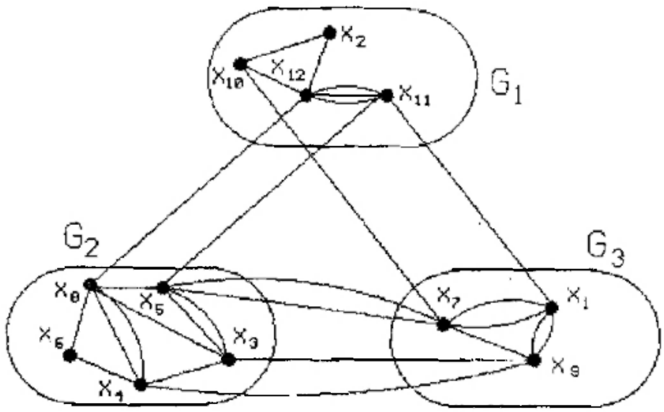

Рис. 2.

Коэффициент разрезания $\Delta(G) = 20/8 = 2{,}5$. Для сравнения: коэффициент разрезания этого же графа традиционным последовательным методом составил 1,15, а коэффициент разрезания с использованием чисел связности и матричными итерационными методами составил 1,8.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Курейчик В.М.*** Применение графов для проектирования дискретных устройств. – М., 1974.
2. Методы разбиения схем РЭА на конструктивно законченные части / ***К.К. Морозов, А.Н. Мелихов, Л.С. Бернштейн и др.***; под ред. ***К.К. Морозова***. – М., 1978.
3. ***Шандриков А.С.*** Последовательный метод разрезания графа с минимизацией внешних связей // Вестник учреждения образования «Витебский государственный технологический университет». Пятый выпуск. – Витебск, 2003. – С. 94–100.

S U M M A R Y

Algorithm of the cutup graph is described in this article by the method of consequent distribution of tops in formed piece. In the process of the cutup possible variants are defined and the variant, which provides minimization of the external relationships is chosen.

Поступила в редакцию 4.10.2004