УДК 512.542.6

В.И. Гойко

Исследование свойств $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп

Важной задачей в теории конечных групп является задача отыскания и исследования свойств характеристических классов сопряженных подгрупп. Качественно новый этап в изучении характеристических классов сопряженных подгрупп был связан с выходом статьи Гашюца [1], положившей начало новому направлению в алгебре – теории формаций. В теории формаций все частные результаты, относящиеся к рассматриваемой задаче, освещены с общей точки зрения. Поскольку теория формаций появилась как итог интенсивного изучения конечных разрешимых групп, то все первоначальные конструкции и результаты теории формаций тесно связаны со свойствами разрешимых групп. Однако, в дальнейшем теория формаций стала развиваться также в произвольных конечных группах, бесконечных абстрактных группах, алгебрах Ли, топологических группах. В работе [2] Хоукс ввел $\mathfrak{F}$-профраттиниеву подгруппу в конечных разрешимых группах, что обобщает соответствующий результат работы [3]. В работе [4] Ферстер построил $\mathfrak{X}$-профраттиниеву подгруппу с помощью понятия короны группы для класса конечных разрешимых групп, где $\mathfrak{X}$ – класс Шунка. В вышеуказанных работах явно предполагается разрешимость группы.

Данная работа посвящена построению и установлению основных свойств $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп в произвольных конечных группах. Через $\mathfrak{F}$ в дальнейшем обозначаем некоторую локальную формацию конечных групп. Все рассматриваемые группы и классы групп будем брать из класса всех конечных групп. Все необходимые обозначения, определения и результаты см. в [5–7].

Определение [8]. Пусть C_1 / R_1, C_2 / R_2, . . . , C_n / R_n – множество всех $\mathfrak{F}$-эксцентральных корон группы G. Всякое пересечение $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$, где H_i – дополнение к C_i / R_i в группе G (i = 1, 2,..., n), называется $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G. Если в группе G нет абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G называют саму группу G.

В дальнейшем понадобятся следующие две леммы из [3], доказательства которых не зависят от разрешимости группы.

Лемма 1. *Во всякой группе G существует такой нормальный ряд*

$$G = G_{1,1} \supset \ldots \supset G_{1,a_1} = H_{1,1} \supseteq \ldots \supseteq H_{1,b_1} = G_{2,1} \supset \ldots \supset G_{2,a_2} = H_{2,1} \supseteq$$
$$\supseteq \ldots \supseteq H_{2,b_2} = \ldots = G_{m,1} \supset \ldots \supset G_{m,a_m} = H_{m,1} \supseteq \ldots \supseteq H_{m,b_m} = 1, \quad (1)$$

что $G_{i,j} / G_{i,j-1}$ – *нефраттиниевый G-главный фактор, а* $H_{i,k} / H_{i,k+1} \subseteq$ $\subseteq \Phi(G / H_{i,k+1})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le a_i$, $1 \le k \le b_i$, *причем, для всех* i , j , k *фактор* $G_{i,j} / G_{i,j+1}$ *G-изоморфен фактору* $G_{i,k} / G_{i,k+1}$ *и не G-изоморфен фактору* $G_{h,k} / G_{h,k+1}$, *если* $h \neq i$.

Доказательство. Если G – простая группа, то утверждение леммы очевидно. Пусть G имеет минимальную нормальную подгруппу M. По индукции для фактор-группы G / M утверждение леммы справедливо. Следовательно, если $M \subseteq \Phi(G)$ или же, если во всяком главном ряду группы G имеется лишь один нефраттиниев фактор, G-изоморфный M, то утверждение леммы справедливо и для G. Таким образом, полагаем, что во всяком главном ряду группы G имеется более одного нефраттиниевого фактора, G-изоморфного M. Пусть

$$G/M = G^*_{1,1}/M \supset \dots \supset G^*_{1,a_1}/M = H^*_{1,1}/M \supseteq \dots \supseteq H^*_{1,b_1}/M = G^*_{2,1}/M \supset$$
$$\supset \dots \supset G^*_{2,a_2}/M = H^*_{2,1}/M \supseteq \dots \supseteq H^*_{2,b_2}/M = \dots = G^*_{m,1}/M \supset \dots \supset$$
$$\supset G^*_{m,a_m}/M = H^*_{m,1}/M \supseteq \dots \supseteq H^*_{m,b_m}/M = M/M$$

нормальный ряд группы G / M со свойствами, указанными в лемме, причем, факторы $G^*_{i,j}/G^*_{i,j+1}$ G-изоморфны с M, $j = 1, 2, \dots, a_i$. Заметим, что M – абелева группа. Действительно, так как группа M G-изоморфна с $G^*_{i,j}/G^*_{i,j+1}$, то $C_G(M) = C_G(G^*_{i,j}/G^*_{i,j+1})$. Но $M \subseteq G^*_{i,j+1} \subseteq C_G(G^*_{i,j}/G^*_{i,j+1}) = C_G(M)$. Это означает, что M – абелева группа. Так как M не входит в $\Phi(G)$, то в группе G найдется такая максимальная подгруппа H, что M не входит в H. Заметим, что поскольку M – абелева группа, то $H \cap M = 1$. Покажем, что $G^*_{j,k} \cap H$ – нормальная подгруппа в группе G для всех $j \ge i$ и $k = 1, 2, \dots, a_j$. В самом деле, так как $G^*_{j,k} \subseteq C_G(M)$, то $G^*_{j,k} \cap H$ централизуется подгруппой M. Кроме того, подгруппа $G^*_{j,k} \cap H$ нормальна в H. Следовательно, $G^*_{j,k} \cap H$ нормальна в G. Аналогично убеждаемся, что $H^*_{j,h} \cap H$ – нормальная подгруппа в G при всех $j \ge i$ и $h \in \{1, 2, \dots, b_j\}$. Докажем теперь, что фактор $G^*_{i,1} / G^*_{i,1} \cap H$ G-изоморфен M. В самом деле, так как $(G^*_{i,1} \cap H)M =$ $= G^*_{i,1} \cap HM = G^*_{i,1} \cap G = G^*_{i,1}$ и $G^*_{i,1} \cap H \cap M = 1$, то имеет место G-изоморфизм:

$$G^*_{i,1}/G^*_{i,1} \cap H = (G^*_{i,1} \cap H)M/G^*_{i,1} \cap H \cong M/M \cap G^*_{i,1} \cap H \cong M.$$

Отметим также, что имеют место G-изоморфизмы: $G^*_{j,k} \cap H / G^*_{j,k+1} \cap H \cong$ $G^*_{j,k+1}(G^*_{j,k} \cap H)/G^*_{j,k+1} = G^*_{j,k} \cap G^*_{j,k+1}H/G^*_{j,k+1} = G^*_{j,k}/G^*_{j,k+1}$. Покажем теперь, что при любых $j \ge i$, $k = 1, 2, \dots, a_{j-1}$ $G^*_{j,k} \cap H/G^*_{j,k+1} \cap H$ – нефраттиниевый фактор в группе G. Так как по предположению $(G^*_{j,k}/M)/(G^*_{j,k+1}/M)$ – нефраттиниевый главный фактор в группе G / M и имеет место изоморфизм $G/M \cong H$, то $G^*_{j,k} \bigcap H/G^*_{j,k+1} \bigcap H$ не входит в $\Phi\ (H/G^*_{j,k+1} \bigcap H)$. Последнее означает, что в группе H найдется такая максимальная подгруппа S, что $G^*_{j,k+1} \bigcap H \subseteq S$ и $G^*_{j,k} \bigcap H$ не входит в S. Тогда справедливо, что $(G^*_{j,k} \bigcap H)\,S\,M = HM = G$, $G^*_{j,k+1} \bigcap H \subseteq SM$. Значит, $G^*_{j,k} \bigcap H / G^*_{j,k+1} \bigcap H$ не входит в $\Phi\ (G/G^*_{j,k+1} \bigcap H)$. Введем обозначения:

$G_{h,k} = G^*_{h,k}$ для $h < i$, $k = 1, 2, \ldots, a_h$

$H_{h,k} = H^*_{h,k}$ для $h < i$, $k = 1, 2, \ldots, b_h$

$G_{i,1} = G^*_{i,1}$, $G_{i+1,k} = G^*_{i,k} \bigcap H$ для $k = 1, 2, \ldots, a_i$

$G_{j,k} = G^*_{j,k} \bigcap H$ для $j > k$, $k = 1, 2, \ldots, a_j$

$H_{j,k} = H^*_{j,k} \bigcap H$ для $j > k$, $k = 1, 2, \ldots, b_j$

Теперь видим, что в группе G существует ряд, обладающий свойствами, указанными в лемме. *Лемма доказана.*

Лемма 2 [3]. *Пусть A, B, AB – подгруппы группы G; $x, y \in AB$. Тогда*

$A \bigcap B$ и $A^x \bigcap B^y$ сопряжены в $A\,B$.

Теорема 1. *Пусть T – любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G. Тогда T изолирует все абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G и покрывает остальные главные факторы группы G, причем, если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G разрешим, то все $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G.*

Доказательство. Если группа G не имеет абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то G совпадает с $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G и утверждение теоремы в этом случае очевидно. Предположим теперь, что G имеет абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы и пусть $C_1/R_1, \ldots, C_n/R_n$ – все $\mathfrak{F}$-эксцентральные короны группы G. Доказательство проведем индукцией по числу n. При $n = 1$ теорема верна в силу леммы 5 и теоремы 1 из [7]. Пусть $n > 1$. В силу леммы 1 существует нормальный ряд: $G = G_{1,0} \supset \ldots \supset G_{1,a_1} = H_{1,0} \supseteq \ldots \supseteq H_{1,b_1} = G_{2,0} \supset \ldots \supset G_{2,a_2} = H_{2,0} \supseteq \ldots \supseteq H_{2,b_2} = \ldots = G_{m,0} \supset \ldots \supset G_{m,a_m} = H_{m,0} \supseteq \ldots \supseteq H_{m,b_m} = 1$, в котором $G_{ij}/G_{i,j+1}$ есть нефраттиниев главный фактор G, и $H_{ik}/H_{i,k+1} \subseteq \Phi\ (G/H_{i,k+1})$, $1 \le i \le m$, $0 \le j \le a_i$, $0 \le k \le b_i$, причем для всех i, j, k фактор $G_{ij}/G_{i,j+1}$ G-изоморфен фактору $G_{ik}/G_{i,k+1}$ и $G_{ij}/G_{i,j+1}$ не G-изоморфен фактору $G_{hr}/G_{h,r+1}$, если $h \neq i$. Пусть l – такой наибольший номер, что фактор $G_{l,0}/G_{l,1}$ – $\mathfrak{F}$-эксцентрален и пусть $N = G_{l,0}$. Не теряя общности, мы можем считать, что C_1/R_1 является $(G_{l,0}/G_{l,1})$ – короной. Покажем теперь, что $(C_i\ N/N)/(R_i\ N/N)$ есть $\mathfrak{F}$-эксцентральная корона фактор-группы G/N. Для этого достаточно показать, что $N \subseteq R$. Допустим, что имеется такой нефраттиниев главный фактор

$C_i\ /M$, что N не входит в M и $C_i\ /M$ G-изоморфен G – главным факторам из $C_i\ /R_i$. Легко видно, что фактор $N/M\bigcap N$ и $C_i\ /M$ G-изоморфны. Далее, если L – дополнение к $C_i\ /M$ в G, то $L\,C_i = G$ и $L\bigcap C_i = M$. Тогда $LN = LMN = LC_i = G$, $L \supseteq M \supseteq M\bigcap N$ и L есть дополнение к $N/N\bigcap M$ в G. Следовательно, фактор $N/M\bigcap N$ нефраттиниев. Применяя теорему из [9], заключаем, что найдется такое $t \geq l$, что фактор $G_{t,0}\ /\ G_{t,1}$ и фактор $N/M\bigcap N$ G-изоморфны. Но фактор $N/M\bigcap N$ G-изоморфен G-главным факторам из $C_i\ /R_i$, а значит и факторам $G_{S,0}\ /\ G_{S,1}$ для некоторого $s < l$. Полученное противоречие показывает, что $N\subseteq R_i$. Таким образом, $(C_iN/N)/(R_iN/N) = (C_i\ /N)/(R_i\ /N)$ есть $\mathfrak{F}$-эксцентральная корона группы $G\ /\ N$. Пусть A_i – дополнение к короне $C_i\ /\ R_i$. Тогда $B\ /\ N = (A_2\bigcap A_3\bigcap\ ...\ \bigcap A_n)/N$ есть $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G/N и $T = B\bigcap A_1$ есть $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G. Т.к. по индукции для G/N теорема верна, то $|(G/N):(B/N)|$ совпадает с произведением порядков абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов группы $G\ /\ N$ произвольного главного ряда группы $G\ /\ N$. С учетом равенства $|\,(G/N):(B/N)\,| = |\,G\,|/|\,B\,| = |\,G:B\,|$ заключаем, что $|\,G:B\,|$ совпадает с произведением порядков тех нефраттиниевых факторов главного ряда группы G, которые G-изоморфны G-главным факторам из $C_2/R_2\ ,\ ...\ ,\ C_n/R_n$. Покажем, что $|\,G:T\,| = |\,G:B\,|\,|\,G:A_1\,|$. Для этого предварительно покажем, что $A_1\ (A_2\bigcap\ ...\ \bigcap A_n\ ) = G$. В самом деле, по лемме 5 из [7] подгруппа A_1 изолирует G-главные факторы, G-изоморфные G-главным факторам из $C_1/\ R_1$ и покрывает остальные G-главные факторы. Значит, $A_1G_{l,0} = G$. Т.к. A_i – дополнение к $C_i\ /R_i$ и, кроме того, как показано выше, $G_{l,0} = N \subseteq R_i\ ,\ i = 2\ ,\ ...\ ,\ n$, то $A_i \supseteq G$ и $A_1(A_2\bigcap\ ...\ \bigcap A_n) = G$. Далее, в силу равенств $|\,G:A_1\,| = |\,A_1\ B:A_1\,| = \dfrac{|\,B\,|}{|\,A_1\bigcap B\,|}$ и $|\,G:B\,| = |\,A_1B:B\,| = \dfrac{|\,A_1\,|}{|\,A_1\bigcap B\,|}$ видим, что $|\,G:A_1\,|\,|\,G:B\,| = \dfrac{|\,A_1\,|\cdot|\,B\,|}{|\,A_1\bigcap B\,|\cdot|\,A_1\bigcap B\,|}$. Т.к. кроме того,

$$|\,G:T\,| = \frac{|\,A_1\,|\cdot|\,B\,|}{|\,A_1\bigcap B\,|\cdot|\,A_1\bigcap B\,|},$$

то $|\,G:T\,| = |\,G:A_1\ \ |\,G:B\,|$. Теперь в силу леммы 5 из [7] индекс $|\,G:A_1\,|$ совпадает с произведением порядков абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных G-главных факторов произвольного главного ряда группы G, G-изоморфных G-главным факторам из $C_1\ /R_1$, заключаем, что $|\,G:T\,| = |\,G:A_1\,|\,|\,G:B\,|$ совпадает с произведением порядков нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных факторов произвольного главного ряда G.

Следовательно, подгруппа T изолирует все абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные G-главные факторы и покрывает остальные G-главные факторы.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$-корадикал группы G разрешим. Пусть A_i и B_i – дополнения к короне C_i / R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $(A_2 \cap \ldots \cap A_n)/N$ и $(B_2 \cap \ldots \cap B_n)/N$ есть $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы группы G/N (здесь, как и выше $N = G_{l,0}$). По индукции найдется такой элемент $xN \in (G/N)$, что $(A_2 \cap \ldots \cap A_n)/N = ((B_2 \cap \ldots \cap B_n)/N^{xN}$. Отсюда следует, что $A_2 \cap \ldots \cap A_n = (B_2 \cap \ldots \cap B_n)^x$. Кроме того, по теореме 1 из [7] $A_1^y = B_1$ для некоторого элемента $y \in G$. Теперь в силу леммы 2 видим, что $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ и $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$ сопряжены в G. Терема доказана.

Следствие 1. В любой группе G существует подгруппа, которая изолирует все абелевы нефраттиниевы эксцентральные главные факторы и покрывает остальные главные факторы группы G, причем, если группа G разрешима, то все такие подгруппы сопряжены в G.

Следствие 2. В любой группе G существует подгруппа, которая изолирует все абелевы нефраттиниевы нециклические главные факторы группы G, причем, если группа G разрешима, то все такие подгруппы сопряжены в G.

Следствие 3 [3]. В любой разрешимой конечной групле существует подгруппа, которая изолирует нефраттиниевы главные факторы группы и покрывает остальные главные факторы группы.

Теорема 2. *Пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы G. Тогда и только тогда A/N является $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G/N, когда в G найдется такая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа B, что $A/N = BN/N$.*

Доказательство. Достаточность. Покажем сначала, что BN/N входит в некоторую $\mathfrak{F}$-профраттиниеву подгруппу группы G. Если G/N не имеет абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то G/N является $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G/N и следовательно, BN/N входит в $\mathfrak{F}$-профраттиниеву подгруппу группы G/N в этом случае. Пусть G/N имеет абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы. Пусть $(C_i/N)/(R_i/N)$ – произвольная $\mathfrak{F}$-эксцентральная корона фактор-группы G/N и пусть M/N – такая максимальная в G/N подгруппа, которая дополняет некоторый (G/N) – главный фактор $(H/N)/(K/N)$ из $(C_i/N)/(R_i/N)$. Тогда максимальная подгруппа M в G дополняет G-главный фактор H/K. Пусть $C/R - (H/K)$ – корона группы G. Тогда легко показать, что $R \subseteq M$. По лемме *3* [7] имеем, что RH/RK есть G-главный фактор. Итак, M дополняет некоторый G-главный фактор из C/R. Значит, ввиду *леммы 4* из [7] в группе G найдется такая максимальная подгруппа D, что $D_G = M_G$ и $B \subseteq D$. Понятно, что ядра подгрупп M/N и DN/N совпадают. Таким образом, в G/N найдется такое дополнение к короне $(C_i/N)/(R_i/N)$, которое содержит BN/N. Следовательно, в G/N найдется такая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа L/N, что $BN/N \subseteq L/N$. Ввиду теоремы 1 ясно, что BN/N и L/N имеют одинаковое свойство покрытия-изолирования главных факторов группы G/N. Теперь в силу леммы 4 из [6] имеем, что порядки групп BN/N и L/N совпадают. Учитывая теперь включение $BN/N \subseteq L/N$ заключаем, что $BN/N = L/N$, т.е. BN/N является $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подгруппой группы G/N.

Необходимость. Пусть $(H/N)/(K/N)$ – произвольный абелев нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный (G/N) – главный фактор. Покажем прежде, что если $(C/N)/(R/N)$ – произвольная $\mathfrak{F}$-эксцентральная корона в G/N, то для любого дополнения L/N к этой короне в G/N справедливо, что $L/N \supseteq FN/N$, где F – некоторое дополнение к (H/K)-короне в G. Действительно, пусть

$$R/N = Q_0/N \subset Q_1/N \subset \ldots \subset Q_m/N = C/N \qquad (1)$$

произвольный участок (G/N)-главного ряда между R/N и C/N.

Покажем, что в группе (G/N) найдутся такие максимальные подгруппы $M_1/N, M_2/N, \ldots, M_m/N$, что $L/N = M_1/N \cap M_2/N \cap \ldots \cap M_m/N$ и, кроме того, M_i/N дополняет в группе G/N фактор $(Q_i/N)/(Q_{i-1}/N)$. Пусть $H_1/N, H_2/N, \ldots, H_m/N$ – такие максимальные подгруппы, что H_i/N дополняет фактор $(Q_i/N)/(Q_{i-1}/N)$. В силу леммы 4 из [7] для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ найдется такая максимальная подгруппа M_i/N, что $L/N \subseteq M_i/N$ и M_i/N и H_i/N имеют равные ядра. Понятно, что M_i/N дополняет фактор $(Q_i/N)/(Q_{i-1}/N)$ и, кроме того, видно, что $L/N = M_1/N \cap M_2/N \cap \ldots \cap M_m/N$. Пусть C_1/R_1 – (H/K) – корона группы G. Поскольку $C_G(H/K)/N = C_{G/N}(H/N/K/N)$, то $C_1 = C$. Покажем, что $R_1 \subseteq R$. Имеем, $R/C = \bigcap (S/N)$, где S/N пробегает все такие нормальные подгруппы в G/N, что $(C/N)/(S/N)$ – нефраттиниев (G/N)-главный фактор, G-изоморфный $(H/N)/(K/N)$ и $R_1 = \bigcap D$, где D пробегает все такие нормальные в G подгруппы, что C/D нефраттиниев G-главный фактор, G-изоморфный H/K. Но если $(C/N)/(K/N)$ нефраттиниев (G/N)-главный фактор изоморфный $(H/N)/(K/N)$, то C/S-нефраттиниев G-главный фактор, изоморфный H/K. Отсюда вытекает, что $R_1 \subseteq R$. Если $R_1 = R$, то L – дополнение к короне C/R, т.е. доказываемое утверждение в этом случае очевидно. Пусть $R_1 \neq R$ и

$$R_1 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_l = R = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = C \qquad (2)$$

участок главного ряда группы G. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_l$ – такие максимальные подгруппы группы G, что K_i дополняет фактор V_i/V_{i-1} в группе G. Пусть $F = K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_l \cap M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m$. Легко видно, что F – дополнение к C/R_1 в группе G. При этом, поскольку $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m = L$, то ясно, что $FN/N \subseteq L/N$. Возьмем произвольную $\mathfrak{F}$-профраттиниеву подгруппу A/N в группе G/N и покажем, что в G найдется такая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа T, что $A/N = TN/N$. Утверждение очевидно, если в G/N нет абелевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных нефраттиниевых главных факторов. Предположим, что в G / N есть абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы. Пусть $(C_1 / N) / (R_1 / N)$, . . . , $(C_t / N) / (R_t /N)$ – все $\mathfrak{F}$-эксцентральные короны группы G/N, причем, $A / N = L_1 / N \cap \ldots \cap L_t / N$, где L_i / N – дополнение в G / N к короне $(C_i / N) / (R_i / N)$ и $(C_i / N) / (R_i / N)$ есть $(H_i / N) / (K_i / N)$ – корона. Пусть $C_i^* / R_i^* - (H_i / K_i)$ – корона группы G, i = 1, 2, ... , t. Ввиду доказанного выше для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ найдется дополнение F_i к короне C_i^* / R_i^* в группе G, что $F_i N/N \subseteq L_i / N$. Значит, $F_1 N/N \cap F_2 N/N \cap \ldots \cap F_t N/N \subseteq A/N$. Понятно, что $(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_t) N/N \subseteq F_1 N/N \cap \ldots \cap F_t N/N$ и в G найдется такая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа T, что $T \subseteq F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_t$. Значит, $TN/N \subseteq A/N$. В силу *теоремы 1* получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Gashutz W.*** Zur Theorie der endlicher auflosbarer Gruppen // Math. Zeits., 1963. Vol. 80, № 4. – P. 300–305.
2. ***Hawkes T.O.*** Analogues of Prefrattini subgroups // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Austral. Nat. Univ. Canberra, 1965. – N. Y., 1967. – P. 145–150.
3. ***Gashutz W.*** Praefrattinigruppen // Arch. Math., 1962. Vol. 13. – P. 418–426.
4. ***Forster P.*** Prefrattini Groups // J. Austral. Math. Soc. (Series A), 1983. Vol. 34. – P. 234–247.
5. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М., 1978.
6. ***Гойко В.И.*** $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Мн., 1986. – С. 34–42.
7. ***Гойко В.И.*** Свойства корон конечных групп // Вестник БГУ, 2005, № 2. – С. 21–28.
8. ***Гойко В.И., Скиба А.Н.*** О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгруппах конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн., 1984. – С. 53–58.
9. ***Carter R., Ficher B., Hawkes T.*** Extreme classes of finite soluble groups // J. Of Algebra, 1968. Vol. 19, № 3. – P. 285–313.

S U M M A R Y

In this article the main properties of $\mathfrak{F}$-prefrattini subgroups of finite groups are bult and researched. Earlier such problem was solved by Howkes , Forster in finite solvable groups and by Hoika, Skiba in groups with solvable $\mathfrak{F}$-residual , where $\mathfrak{F}$ is a locally formation.

Поступила в редакцию 31.03.2005