УДК 539.3

П.А. Гладков

Волновые пакеты в упругом волноводе произвольного сечения

Введение. Целью данной работы является вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение локализованных волн в упругой среде, ограниченной поверхностью волновода произвольного сечения. В работе используется асимптотический метод, предложенный в [1, 2] и применявшийся в [3] для случая среды, ограниченной поверхностью вращения. Решение аппроксимируется функциями, локализованными возле плоскости центра волнового пакета, перемещающейся в продольном направлении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную упругую среду, ограниченную поверхностью Ω волновода произвольного сечения, определяемую в цилиндрических координатах r, φ, z следующим образом:

$$\Omega=\left\{(r,\varphi,z): r=\tilde{f}[\varphi,z], 0\le\varphi<2\pi, -\infty<z<+\infty\right\}. \qquad (1.1)$$

Уравнение, описывающее процесс распространения волн, имеет вид

$$\Delta U-\frac{1}{c^2(z,t)}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0, \qquad (1.2)$$

где Δ – оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

Граничные условия берутся в виде условий отсутствия смещения

$$U|_{\Omega}=0. \qquad (1.3)$$

Предполагается, что функции $\tilde{f}[\varphi,z]$, $c(z,t)$ бесконечно дифференцируемы по z, а $c(z,t)$ непрерывна по t, более того

$$\frac{\partial^l\tilde{f}}{\partial z^l},\ \frac{\partial^l c}{\partial z^l},\ c\sim 1,\ l=1,2,\dots \text{ при } \varepsilon\to 0. \qquad (1.4)$$

Малый параметр введен для изучения семейства коротких волн, длина которых имеет порядок ε, а мгновенная частота равна $\varepsilon^{-1}\omega(t)$. Также предполагается, что

$$\max_{-\infty<z<+\infty}\tilde{f}[\varphi,z]\sim\varepsilon. \qquad (1.5)$$

2. Метод решения. Следуя [3], решение задачи (1.2), (1.3) будем строить в виде волнового пакета (ВП) – семейства волн, бегущих вдоль оси Oz и локализованных в окрестности плоскости $z=q(t)$. Последнюю будем называть центром ВП.

Учитывая локальный характер решения задачи и небольшую ширину волновода, удобно ввести локальную систему координат следующим образом:

$$z=q(t)+\varepsilon^{1/2}\xi, \quad r=\varepsilon\rho. \qquad (2.1)$$

В таком случае $0<\rho<f[\varphi,z]=\varepsilon^{-1}\tilde{f}[\varphi,z]$, а уравнение (1.2) принимает вид:

$$c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\right)-\varepsilon^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+2\varepsilon^{3/2}\dot{q}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial t}-\varepsilon\dot{q}^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\varepsilon^{3/2}\ddot{q}\frac{\partial U}{\partial\xi}=0. \quad (2.2)$$

Функция $c(z,t)$ вблизи центра $z=q(t)$ волнового пакета может быть разложена в ряд Тейлора:

$$c(z,t)=c[q(t),t]+\varepsilon^{1/2}c'[q(t),t]\xi+\frac{1}{2}\varepsilon c''[q(t),t]\xi^2+\cdots. \quad (2.3)$$

Решение граничной задачи ищем в виде [3]:

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}u_k(\rho,\xi,\varphi,t)\exp\left\{i\varepsilon^{-1}S(\xi,t,\varepsilon)\right\}, \quad (2.4)$$

$$S=\int\omega(t)\mathrm{d}t+\varepsilon^{1/2}p(t)\xi+\tfrac{1}{2}\varepsilon b(t)\xi^2,\ \operatorname{Im}b(t)>0, \quad (2.5)$$

где $u_k(\rho,\xi,t)$ – полиномы по ξ, $p(t)$ – волновое число, функция $b(t)$ характеризует ширину волнового пакета.

Подстановка функции (2.4) в уравнение (2.2) дает последовательность краевых задач

$$\sum_{j=0}^{k}L_j u_{k-j}=0,\ k=1,2,\ldots, \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=0}^{k}\Gamma_j u_{k-j}\Big|_{\rho=f[\varphi,q(t)]}=0,\ k=1,2,\ldots, \quad (2.7)$$

где

$$L_0=c^2[q(t),t]\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-p^2\right]+(\omega-\dot{q}p)^2,$$

$$L_1=\left(b\frac{\partial L_0}{\partial p}+\frac{\partial L_0}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial L_0}{\partial\omega}\right)\xi-i\frac{\partial L_0}{\partial p}\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$L_2=\frac{1}{2}\left(b^2\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+2b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 L_0}{\partial\omega^2}+2\dot{p}\frac{\partial^2 L_0}{\partial q\partial\omega}+2\dot{p}b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial\omega}+\dot{b}\frac{\partial L_0}{\partial\omega}\right)\xi^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-i\left(b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial q}+\dot{p}\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial\omega}\right)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}-i\frac{\partial L_0}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$-i\left(\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+\frac{1}{2}\dot{\omega}\frac{\partial^2 L_0}{\partial\omega^2}+\dot{p}\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial\omega}-\ddot{q}p\right),\ \ldots \quad (2.8)$$

$$\Gamma_0=1,\ \Gamma_1=\xi f_z\frac{\partial}{\partial\rho},\ \Gamma_2=\frac{1}{2}\xi^2\left(f_{zz}\frac{\partial}{\partial\rho}+f_z^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\ \ldots \quad (2.9)$$

2.1. Нулевое и первое приближение. В нулевом приближении (*k=0*) имеем следующую краевую задачу:

$$L_0u_0\equiv c^2[q(t),t]\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2}-p^2u_0\right]+(\omega-\dot{q}p)^2u_0=0, \quad (2.10)$$

$$u_0\{f[\varphi,q(t)],\xi,\varphi,t\}=0. \quad (2.11)$$

Решение (2.10), (2.11) сводится к задаче о собственном значении краевой задачи с однородным граничным условием (2.11) для уравнения

$$c^2\left[q(t),t\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\lambda^2}{f^2(q)}u\right]=0\,. \tag{2.12}$$

Пусть λ_n – собственное значение краевой задачи (2.11), (2.12), а $u_0^*(\rho,\varphi,t)$ – соответствующая этому значению собственная функция. Краевая задача (2.10), (2.11) будет иметь нетривиальное решение $u_0 = P_0(\xi,\ t)\,u_0^*$ лишь при выполнении условия

$$\omega(t)=\dot q(t)p(t)-H^{\pm}[p(t),q(t),t]\,, \tag{2.14}$$

где

$$H^{\pm}(p,q,t)=\pm c(q,t)\sqrt{p^2+\frac{\lambda_n^2}{f^2(q)}}\ - \tag{2.15}$$

функция Гамильтона, а $P_0(\xi,\ t)$ – полиномо по ξ.

В первом приближении (k=*1*) имеем задачу

$$L_0u_1=-L_1u_0\,, \tag{2.16}$$

$$u_1=-\Gamma_1 u_0\ \text{ при }\ \rho=f[\varphi,q(t)]\,. \tag{2.17}$$

Решение данной задачи имеет вид

$$u_1(\rho,\xi,\varphi,t)=P_1(\xi,t)u_0^*(\rho,\varphi,t)+u_1^{(P)}(\rho,\xi,\varphi,t)\,, \tag{2.18}$$

где $P_1(\xi,t)$ – неизвестный полином по ξ, подлежащий определению, $u_1^{(P)}(\rho,\xi,\varphi,t)$ – частное решение уравнения (2.16).

Принимая во внимание самосопряженность граничной задачи (2.10), (2.11), равенство

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{f[\varphi,q]}\rho u_0\left(L_0u_1+L_1u_0\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=0 \tag{2.19}$$

является условием существования $u_1(\rho,\xi,\varphi,t)$ в виде (2.18). Чтобы вычислить значение второго подынтегрального слагаемого, необходимо определить операторы $\dfrac{\partial L_0}{\partial p}$, $\dfrac{\partial L_0}{\partial q}$. Для этого проинтегрируем краевую задачу (2.10), (2.11) по параметрам p и q:

$$L_0\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial L_0}{\partial p}u_0-2H\left(\dot q-\frac{\partial H}{\partial p}\right)u_0=0,\quad \frac{\partial u}{\partial p}=0\ \text{ при }\ \rho=f\left[\varphi,q(t)\right],$$

$$L_0\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial L_0}{\partial q}u_0+2H\frac{\partial H}{\partial q}u_0=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial q}+f'\frac{\partial u_0}{\partial\rho}=0\ \text{ при }\ \rho=f\left[\varphi,q(t)\right]. \tag{2.20}$$

Учитывая соотношения (2.20), условие (2.19) может быть представлено в виде

$$b\left(\dot q-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\xi P_0-\left(\dot p+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\xi P_0-\mathrm{i}\left(\dot q-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\frac{\partial P_0}{\partial\xi}=0\,. \tag{2.21}$$

В [1] показано, что уравнение (2.21) имеет решение в полиномиальной форме лишь в том случае, если функции p и q удовлетворяют системе Гамильтона

$$\dot q=\partial H/\partial p\,,\ \ \dot p=-\partial H/\partial q\,. \tag{2.22}$$

Это утверждение справедливо и для случая среды, ограниченной поверхностью произвольного сечения.

Полином $P_0(\xi,t)$ в этом приближении остается неопределенным.

2.2. Второе приближение. Во втором приближении (k=2) имеем краевую задачу

$$L_0 u_2 = -L_1 u_1 - L_2 u_0 , \tag{2.24}$$

$$u_2 = -\Gamma_1 u_1 - \Gamma_2 u_0 \text{ при } \rho = f[\varphi, q(t)]. \tag{2.25}$$

Условие разрешимости данной задачи может быть выведено из уравнения

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{f[\varphi,q]} \rho u_0 (L_0 u_2 + L_1 u_1 + L_2 u_0) d\rho d\varphi = 0 . \tag{2.26}$$

Для того чтобы определить операторы $\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 L_0}{\partial p \partial q}$, $\frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}$, краевую задачу (2.10), (2.11) продифференцируем по параметрам p и q еще раз. К примеру,

$$L_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial q^2} + 2\frac{\partial L_0}{\partial q}\frac{\partial u_0}{\partial q} - 2\frac{\partial L_0}{\partial \omega}\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial u_0}{\partial q} + \frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2} u_0$$

$$-2\frac{\partial^2 L_0}{\partial \omega \partial q}\frac{\partial H}{\partial q} u_0 + \frac{\partial^2 L_0}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^2 u_0 - \frac{\partial L_0}{\partial \omega}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} u_0 = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial q^2} + 2 f_i' \frac{\partial^2 u_0}{\partial q \partial \rho} + f'' \frac{\partial u_0}{\partial \rho} + f'^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \rho^2} = 0 \text{ при } \rho = f[\varphi, q(t)]. \tag{2.27}$$

Подстановка формул (2.27) в (2.26), с учетом уравнений (2.21), (2.23), приводит к дифференциальному уравнению

$$\left(\xi^2 D_b - 2 D_{\xi,t}\right) P_0 = 0 \tag{2.28}$$

относительно $P_0(\xi,t)$. Здесь

$$D_b = \dot{b} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} b^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} b + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} ,$$

$$D_{\xi,t} = h_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + h_1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + h_2 \frac{\partial}{\partial t} + h_3 ,$$

$$h_0(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} , \quad h_1(t) = \mathrm{i}\left(b\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}\right), \quad h_2 = \mathrm{i} ,$$

$$h_3(t) = \frac{\mathrm{i}}{2H}\left\{ bH\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} - \dot{\omega} - 2\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \ddot{q}p \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\int_0^{f[\varphi,q]} \rho u_0 \left(\frac{\partial L_0}{\partial p}\frac{\partial u_0^*}{\partial q} + \frac{\partial L_0}{\partial \omega}\frac{\partial u_0^*}{\partial t}\right) d\rho d\varphi \right\}. \tag{2.29}$$

В [1] показано, что уравнение (2.28) имеет решение в полиномиальной форме лишь в том случае, если функция $b(t)$ является решением уравнения Риккати

$$\dot{b}+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}b^2+2\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}b+\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}=0\,. \qquad (2.30)$$

Это утверждение справедливо и для случая среды, ограниченной поверхностью волновода произвольного сечения.

Пусть функция $b(t)$ является решением уравнения (2.30) с начальным условием

$$b(0)=b_0,\ \operatorname{Im} b_0>0\,. \qquad (2.31)$$

Можно доказать, что если функции $c(z,t)$, $f(z)$ являются бесконечно дифференцируемыми по переменной z, то выполнение неравенства $\operatorname{Im} b_0>0$ влечет за собой выполнение неравенства $0<\operatorname{Im} b(t)<+\infty$ для любого конечного интервала $0<t<\tilde{t}$, обеспечивая выполнение условия (2.5).

Принимая во внимание (2.30), условие (2.28) принимает вид амплитудного уравнения для определения полинома $P_0(\xi,t)$:

$$h_0(t)\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}+h_1(t)\xi\frac{\partial P_0}{\partial\xi}+h_2\frac{\partial P_0}{\partial t}+h_3(t)P_0=0\,. \qquad (2.32)$$

Решение уравнения (2.32) было построено в [3].

3. Заключение. Таким образом, в работе построены система Гамильтона (2.22), уравнение Риккати (2.30), дисперсионное (2.14) и амплитудное (2.32) уравнения, описывающие распространение локализованных волн в среде, ограниченной волноводом произвольного сечения.

Показана инвариантность данных уравнений относительно поперечного сечения волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Михасев Г.И.*** О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки // Доклады Академии наук Беларуси, 1994. – Том 38, № 4. – С. 24–27.
2. ***Mikhasev G.I.*** Localized families of bending waves in a thin medium-length cylindrical shell under pressure // Journal of sound and vibration, 2002, № 253(4). – P. 833–857.
3. ***Mikhasev G.I.*** Traveling wave packets in a non-homogeneous narrow medium bounded by a surface of revolution // Wave Motion, 2003, vol. 37. – P. 207–217.

S U M M A R Y

The process of wave propagation in an infinitely long non-homogeneous narrow medium (waveguide) bounded by an arbitrary surface is considered. An asymptotic solution of the wave equation is constructed in the form of localized families of short waves (the wave packets) running in the longitudinal direction, the wave length being of the same order as the characteristic width of the waveguide.

Поступила в редакцию 14.09.2004