УДК 517.956

**Ж.В. Иванова**

# Задача Коши для одного нелинейного параболического уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u_t = \Delta(e^u) - (e^u - 1)^p \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad (2)$$

где $(x, t) \in S = R^N \times [0, \infty)$, $0 < p < 1$, $u_0(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности. Нас будут интересовать только неотрицательные решения задачи (1), (2).

Данное уравнение подстановкой $v = e^u - 1$ сводится к следующему нелинейному параболическому уравнению

$$v_t = (v + 1)(\Delta v - v^p) \qquad (3)$$

с начальным условием

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad (4)$$

где $v_0(x) = e^{u_0(x)} - 1$.

Очевидно, что $v_0(x)$ и $v(x, t)$ будут также неотрицательными функциями.

Уравнение (4) является равномерно параболическим, следовательно, оно может иметь только классические решения (см., например, [1]).

В данной работе изучается поведение решений задачи Коши (3), (4). Доказывается, что при определенных условиях, наложенных на функцию $v_0(x)$, решение задачи (3), (4) в любой точке $y \in R^N$ обращается в ноль за конечное время. При этом используются методы работ [2, 3].

**Определение 1.** *Функция* $\omega(x, t) \in C^{2,1}_{x,t}(S)$, *удовлетворяющая в* S *неравенству*

$$-\omega_t + (\omega + 1)(\Delta\omega - \omega^p) \le 0 \ (\ge 0), \qquad (5)$$

*называется суперрешением (субрешением) уравнения (3) в полупространстве* $S$.

**Определение 2.** *Решение* $v(x, t)$ *задачи (3), (4) называется минимальным решением этой задачи в* $S$, *если для любого другого решения* $\bar{v}(x, t)$ *задачи (3), (4) в* $S$ *выполняется неравенство* $v(x, t) \le \bar{v}(x, t)$.

Таким же образом вводятся понятия суперрешения и субрешения уравнения (3) и задачи (3), (4) в полосе $S_T = R^N \times [0, T)$.

**Теорема 1.** *Пусть функция* $\varphi(x, t)$ *является суперрешением уравнения (3) и* $v_0(x) \le \varphi(x, 0)$. *Тогда в* $S$ *существует минимальное решение задачи Коши (3), (4) такое, что* $v(x, t) \le \varphi(x, t)$.

Теорема 1 доказывается так же, как, например, в работе [2].

Определим класс $K(S)$ неотрицательных функций $\psi(x, t)$, для которых на множестве $S$ выполняется неравенство: $\psi(x, t) \le M_1(\alpha_1 + |x|^2)^{\frac{1}{1-p}}$.

Здесь и далее через $M_i$ и $\alpha_i$ будем обозначать соответственно положительные и неотрицательные постоянные.

**Теорема 2.** *Пусть функция* $v_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$v_0(x) \le C_N(\alpha_2 + |x|^2)^{\frac{1}{1-p}},$$

*где*

$$C_N = \left[\frac{(1-p)^2}{2(2p+N(1-p))}\right]^{\frac{1}{1-p}}. \qquad (6)$$

*Тогда задача (3), (4) имеет минимальное решение* $v(x, t) \in K(S)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = C_N(\alpha_2 + |x|^2)^{\frac{1}{1-p}}. \qquad (7)$$

Нетрудно показать, что при любом $\alpha_2$ функция $\varphi(x)$ является стационарным решением уравнения (3), а, следовательно, его суперрешением.

Тогда по теореме 1 существует минимальное решение $v(x, t)$ задачи (3), (4), такое, что $v(x, t) \le \varphi(x)$.

**Теорема 3.** *Пусть* $v_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$v_0(x) \le A|x|^{\frac{2}{1-p}} + o\left(|x|^{\frac{2}{1-p}}\right), \qquad (8)$$

*где*

$$0 < A < C_N. \qquad (9)$$

*Тогда для любого* $y \in R^N$ *минимальное решение* $v(x, t)$ *задачи Коши (3), (4) обращается в ноль за конечное время* $T(y)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $y \in R^N$ и покажем, что при выполнении (8) существует такое значение $T(y)$, что $v(x, t) = 0$ при $t \ge T(y)$.

Пусть $|x| = r$. Рассмотрим функцию

$$\theta(r, t) = \varepsilon_1 g(t) + (1 - \varepsilon_1) z(r, |y|), \qquad (10)$$

где

$$g(t) = (B - (1-p)t)_+^{\frac{1}{1-p}}, \qquad (11)$$

$$z(r, |y|) = C_N(r - |y|)_+^{\frac{2}{1-p}}, \qquad (12)$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{A+\varepsilon}{C_N},\ 0 < \varepsilon < C_N - A. \qquad (13)$$

Постоянные $A$ и $C_N$ удовлетворяют (6) и (9), постоянная $B$ будет определена в дальнейшем. В равенствах (11), (12) используется обозначение $s_+ = max(0, s)$.

Нетрудно показать, что для функций $g(t)$ и $z(r, |y|)$ справедливы следующие неравенства:

$$g' + (g+1)g^p \ge 0, \qquad (14)$$

$$Lz = (z+1)(z_{rr} + \frac{N-1}{r} z_r - z^p) \le 0, \qquad (15)$$

при $r > |y|$, и $Lz = 0$ при $r \le |y|$.

Покажем справедливость соотношения $L\theta = \theta_t - (\theta + 1)(\Delta\theta - \theta^p) \ge 0$.

Так как $0 < p < 1$, то по свойству выпуклых функций

$$\theta^p = (\varepsilon_1 g(t) + (1-\varepsilon_1) z(r))^p \ge \varepsilon_1 g^p(t) + (1-\varepsilon_1) z^p(r),$$

и, следовательно,

$$L\theta \geq \varepsilon_1 g' + (\varepsilon_1(g+1) + (1-\varepsilon_1)(z+1)) \times (\varepsilon_1 g^p + (1-\varepsilon_1)(z^p - z_{rr} - \frac{N-1}{r} z_r)) =$$

$$= \varepsilon_1 (g' + \varepsilon_1 (g+1) g^p) + (1+\varepsilon_1)^2 (z+1)(z^p - z_{rr} - \frac{N-1}{r} z_r) +$$

$$+ \varepsilon_1 (1-\varepsilon_1)(z^p - z_{rr} - \frac{N-1}{r} z_r)(g+1) + \varepsilon_1(1-\varepsilon_1)\, g^p (z+1).$$

На основании определений функций $g(t)$ и $z(r, |y|)$, неравенств (14) и (15), делаем вывод о том, что $L\theta \geq 0$. Следовательно, $\theta(r, t)$ – суперрешение уравнения (3).

Определим постоянную $B$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$v_0(x) \leq \theta(x, 0). \tag{16}$$

Пусть для $v_0(x)$, $A$ и $\varepsilon_1$ справедливы (8), (9) и (13). Очевидно,

$$\theta(|x|, 0) = \varepsilon_1 B^{\frac{1}{1-p}} + C_N (1-\varepsilon_1)(r-|y|)_+^{\frac{2}{1-p}} \geq (A+\varepsilon)(r-|y|)_+^{\frac{2}{1-p}}.$$

Обозначим $M(R) = max_{|x| \leq R}\, v_0(x)$ и рассмотрим уравнение

$$(A+\varepsilon)(r-|y|)_+^{\frac{2}{1-p}} = M(r).$$

Пусть $r = R(\varepsilon)$ – наибольший корень этого уравнения. В силу (8) такой корень существует. Тогда неравенство (16) выполняется при $r > R(\varepsilon)$. Для выполнения неравенства (16) при $r \leq R(\varepsilon)$, достаточно подобрать функцию $g(t)$ так, чтобы $\varepsilon_1$

$g(0) = max_{|x| \leq R}\, v_0(x)$. Тогда можно положить $\varepsilon_1 B^{\frac{1}{1-p}} = max_{|x| \leq R}\, v_0(x)$.

Отсюда $B = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} max_{|x| \leq R}\, v_0(x)\right)^{1-p}$.

Функция $\theta(|x|, t)$ удовлетворяет теореме 1, следовательно, существует минимальное решение задачи (3), (4), такое, что $v(x, t) \leq \theta(x, t)$. Так как на основании (14) и (15) $\theta(y, t) = 0$ при $t \geq \frac{B}{1-p}$, то $v(y, t) = 0$ при

$$t \geq T(y) = \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} max_{|x| \leq R}\, v_0(x)\right)^{1-p}}{\varepsilon^{1-p}(1-p)}. \tag{17}$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Отметим, что в доказательстве теоремы 3 приводится оценка (17) времени зануления минимального решения задачи Коши в любой точке пространства.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.*** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967. – 736 с.
2. ***Гладков А.Л.*** О задаче Коши в классах растущих функций для уравнений фильтрации с конвекцией // Матем. сб., 1995. – Т. 186, № 6. – С. 35–56.
3. ***Гладков А.Л.*** О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями // Матем. сб., 2000. – Т. 191, № 3. – С. 25–42.



## *SUMMARY*

*We consider the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation. Behaviour of solutions of the Cauchy problem is investigated. The vanishing of the minimal solutions at a finite time is proved.*



*Поступила в редакцию 3.02.2005*