УДК 517.977

О.В. Храмцов, А.А. Козлов

О свойствах равномерно вполне управляемых систем

Рассмотрим линейную управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,,\ x \in R^n,\ t \in R,\ u \in R^m, \tag{1}$$

где u – вход, управление, x – выход, состояние системы, $A(t)$ и $B(t)$, $t \in R$ – ограниченные кусочно-непрерывные матричные коэффициенты.

Введем необходимые обозначения и понятия. Будем считать, что в каждом пространстве R^k, $k \in N$, зафиксирован канонический ортонормированный базис e_1, ... e_k и связанная с ним евклидова норма $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$. Линейные операторы и отвечающие при таком выборе базисов матрицы будем отождествлять. Через M_{kl} обозначим пространство матриц размерности $k \times l$ с операторной (спектральной) нормой [1] $\| A \| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$, а через $KC_{kl}(I)$, где $I \subset R$ – пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : I \to M_{kl}$ с равномерной нормой $\| U(t) \|_C = \sup\limits_{t \in I} \| U(t) \|$. Пространство M_{k1} отождествим с R^k, поэтому запись $KC_{k1}(I)$ будет обозначать пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : I \to R^k$ с равномерной нормой. Будем также использовать величины $a = \| A \|_C$, $b = \| B \|_C$, считая, что норма вычисляется по всей области I определения функции. Пусть $X(t,s)$ – матрица Коши системы (1) с нулевым управлением, обозначим $Q(t,s) = X(t,s)B(s)$, $t \in R$, $s \in R$.

Известны следующие определения равномерной полной управляемости системы (1).

Определение 1 (Р.Е. Калман [2]). *Система (1) называется* σ *– равномерно вполне управляемой, если существует такое положительное число* $\beta > 0$, *что матрица управляемости (матрица Калмана)*

$$W(t_0, t_0 + \sigma) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0, s) Q^T(t_0, s) ds \tag{2}$$

при всяком $t_0 \in R$ *для любого* $\xi \in R^n$, $\| \xi \| = 1$, *удовлетворяет неравенству:*

$$\xi^T W(t_0, t_0 + \sigma) \xi > \beta . \tag{3}$$

Определение 2 (Е.Л. Тонков [3]). *Система (1) называется* σ *– равномерно вполне управляемой, если при некотором* $\gamma > 0$ *для произвольных* $t_0 \in R$ *и* $x_0 \in R^n$ *найдется управление* $u_0 \in KC_{m1}([t_0, t_0 + \sigma])$, *удовлетворяющее условию* $\| u_0 \|_C < \gamma \| x_0 \|$ *и такое, что решение* $x(t)$, $t \in I$, *задачи Коши для системы (1) с таким управлением и начальным условием*

$$x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

удовлетворяет условию:

$$x(t_0 + \sigma) = 0 . \tag{5}$$

Если коэффициенты системы (1) равномерно непрерывны, то эквивалентность этих определений вытекает из теоремы 1 в [4] и теоремы 1 в [5]. Непосредственное доказательство этой эквивалентности в общем случае кусочно-непрерывных коэффициентов можно найти в [6], где, однако, доказательство достаточности условий определения 2 для выполнения условий определения 1 проводится от противного. Если же отказаться от условий кусочной непрерывности коэффициентов и рассматривать систему (1) с коэффициентами из каких-либо пространств интегрируемых функций, а также допускать измеримые ограниченные управления, то эти определения окажутся неэквивалентными. В частности, если элементы матрицы B не принадлежат пространству $L_2([t_0, t_0 + \sigma])$, то матрица управляемости $W(t_0, t_0 + \sigma)$ может не существовать, но при этом соответствующая система (2) может быть σ – равномерно вполне управляемой в смысле определения 2. В работе [7] решается задача глобального управления показателями Ляпунова для системы (1) с кусочнонепрерывной матрицей коэффициентов A и равномерно непрерывной матрицей B в предположении, что эта система является σ – равномерно вполне управляемой по Калману, что не позволяет непосредственно перенести результаты этой работы на случай более общих коэффициентов.

В настоящей работе приводится доказательство эквивалентности определений 1 и 2 для систем с кусочно-непрерывными коэффициентами, не использующее метода рассуждений от противного, что позволяет доказать утверждение, эквивалентное следствию 1 леммы 1 в [7], в том, однако, в предположении, что система (1) является σ – равномерно вполне управляемой в смысле определения 2.

Теорема 1. *Если $A(t)$ и $B(t)$, $t \in R$, – кусочно-непрерывные ограниченные матрицы, то система (1) σ – равномерно вполне управляема в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда она σ – равномерно вполне управляема в смысле определения 2.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеет место определение Калмана, т.е. выполняется неравенство (3).

Зафиксируем произвольное t_0, тогда при заданном управлении $u(t)$ решением задачи Коши (1), (4) является вектор

$$x(t) = X(t,t_0)(x_0 + \int_{t_0}^{t} Q(t_0,s)u(s)ds). \qquad (6)$$

Выберем на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ управление $u(t) = Q^T(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_0+\sigma)$. Подставляя это управление в (6), при $t = t_0 + \sigma$ получим:

$$x(t_0+\sigma) = X(t_0+\sigma,t_0)(x_0 - \int_{t_0}^{t} Q(t_0,s)Q(t_0,s)^T W^{-1}(t_0,t_0+\sigma)x_0 ds) =$$
$$= X(t_0+\sigma,t_0)(x_0 - x_0) = 0. \qquad (7)$$

Кроме того, для всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ имеем соотношения:

$$\| u(t) \| = \| -Q^T(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_0+\sigma)x_0 \| \leq \| Q^T(t_0,t) \| \cdot$$
$$\cdot \| W^{-1}(t_0,t_0+\sigma) \| \cdot \| x_0 \| \leq \beta^{-1} \| B^T(t) \| \cdot \| X^T(t_0,t) \| \cdot \| x_0 \| <$$
$$< \beta^{-1} \cdot b \cdot \exp(a\sigma) \cdot \| x_0 \| = \gamma \| x_0 \|, \qquad (8)$$

где $\gamma = \beta^{-1} \cdot b \cdot \exp(a\sigma)$.

Соотношения (7) и (8) показывают, что система управления σ – равномерно вполне управляема по Тонкову.

Замечание 1. *Вышеприведенное доказательство необходимости основано на той же идее, что и доказательство теоремы 2.16 в [8]. Оно полностью совпадает с доказательством, содержащимся в [6] и приведено здесь лишь для полноты и последовательности изложения.*

Достаточность. Пусть система (1) σ – равномерно вполне управляема по Тонкову. Тогда при некотором $\gamma > 0$ для произвольных $t_0 \in R$ и $x_0 \in R^n$ существует управление $u_0 \in KC_{m1}([t_0, t_0+\sigma])$, удовлетворяющее условию $\| u_0 \| \leq \gamma \| x_0 \|$ и обеспечивающее равенство (5), которое при использовании формулы (6) принимает вид:

$$-x_0 = \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)u(s)ds. \qquad (9)$$

Возьмем произвольный вектор $\xi \in R^n$, $\|\xi\|=1$. Умножая слева обе части равенства (9) на ξ^T, получим равенство $-\xi^T x_0 = \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,s)u(s)ds$,

из которого вытекают соотношения

$$|-\xi^T x_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,s)u(s)ds\right| \le \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s)u(s)|\, ds <$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\| \cdot \|u(s)\|\, ds \le \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\| \cdot \gamma \|x_0\|\, ds =$$

$$= \gamma \|x_0\| \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\|\, ds.$$

Отсюда имеем оценку

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\|\, ds \ge \frac{|\xi^T x_0|}{\|x_0\|} \cdot \gamma^{-1}. \qquad (10)$$

Преобразуем квадрат интеграла в (10), используя неравенство Коши-Буняковского [1, с. 51].

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\| ds\right)^2 = \left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} (\|\xi^T Q(t_0,s)\| \cdot 1) ds\right)^2 <$$

$$< \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\|^2 ds \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} 1^2 \cdot ds = \sigma \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\|^2 ds =$$

$$= \sigma \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} (\xi^T Q(t_0,s) Q^T(t_0,s)\xi) ds = \sigma \cdot \xi^T W(t_0,t_0+\sigma)\xi.$$

Таким образом, вследствие неотрицательности обеих частей неравенства (10), имеем

$$\xi^T W(t_0,t_0+\sigma)\xi > \left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\| ds\right)^2 > \left(\frac{|\xi^T x_0|}{\|x_0\|}\right)^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2 \sigma}. \qquad (11)$$

Так как это неравенство выполняется для всех $x_0 \in R$ и

$$\max_{x_0}\left(\left(\frac{|\xi^T x_0|}{\|x_0\|}\right)^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2\sigma}\right) = \frac{1}{\gamma^2\sigma},$$

то, полагая в (11) $\beta = \dfrac{1}{\gamma^2 \sigma}$, получим неравенство (3) из определения 1. Таким образом, система σ – равномерно вполне управляема по Калману. Достаточность, а вместе с ней и теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если система (1) с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами $A(t)$ и $B(t)$, $t \in R$, σ – равномерно вполне управляема (по Тонкову), то найдется $\rho > 0$, позволяющее при всяком $t_0 \in R$ для любого вектора $\xi \in R^n$, $\|\xi\| = 1$, отыскать такие вектор $v \in R^m$, $\|v\| = 1$ и момент времени $t^* \in [t_0, t_0 + \sigma]$, что будет выполняться неравенство*

$$|\xi^T Q(t_0, t^*) v| > \rho \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть система (1) σ – равномерно вполне управляема по Тонкову, тогда при некотором $\gamma > 0$ для произвольных $t_0 \in R$ и $x_0 \in R^n$ существует управление $u_0 \in KC_{m1}([t_0, t_0 + \sigma])$, удовлетворяющее условию $\| u_0 \| < \gamma \| x_0 \|$ и обеспечивающее равенство (9).

Возьмем произвольный вектор $\xi \in R^n$, $\| \xi \| = 1$, умножим обе части равенства (9) слева на ξ^T : $-\xi^T x_0 = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0, s) u(s) ds$.

Взяв модуль от обеих частей последнего равенства и используя неравенства для модуля интеграла и для спектральной нормы [9], получим

$$|-\xi^T x_0| = \left| \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \xi^T Q(t_0,s) u(s) ds \right| \le \int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s) u(s)| ds \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\| \cdot \|u(s)\| ds \le \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \|\xi^T Q(t_0,s)\| \cdot \gamma \|x_0\| ds \le \gamma \|x_0\| \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t_0+\sigma} \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s) e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds < \gamma \sqrt{m} \cdot \| x_0 \| \cdot \max_{i=1..m} \int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s) e_i| ds .$$

Пусть e_k – вектор, на котором достигается максимум величины $\int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s) e_i| ds$,

по $i = \overline{1,m}$. Тогда имеем неравенство $\gamma \sqrt{m} \cdot \| x_0 \| \cdot \int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s) e_k| ds > | \xi^T x_0 |$.

Так как $Q(t_0, t)$ – кусочно-непрерывная ограниченная матричная функция, то $|\xi^T Q(t_0,s) e_k|$ – кусочно-непрерывная ограниченная функция. Вследствие ограниченности функции $|\xi^T Q(t_0,s) e_k|$ найдется точка $t^* \in (t_0, t_0 + \sigma)$, в которой будет выполняться условие

$$|\xi^T Q(t_0, t^*) e_k| > \frac{1}{2} \sup_{t \in [t_0, t_0+\sigma]} |\xi^T Q(t_0, t) e_k|. \qquad (13)$$

Из соотношения (13) и того, что

$$\sigma \cdot \sup_{t \in [t_0, t_0+\sigma]} |\xi^T Q(t_0, t) e_k| > \int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s) e_k| ds,$$

следует $2\sigma|\xi^T Q(t_0,t^*)e_k|\gamma\sqrt{m}\cdot\|x_0\| \geq \gamma\sqrt{m}\cdot\|x_0\|\cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} |\xi^T Q(t_0,s)e_k|ds \geq |\xi^T x_0|$

т.е.

$$|\xi^T Q(t_0,t^*)e_k| \geq \frac{1}{2\gamma\sigma\sqrt{m}} \cdot \frac{|\xi^T x_0|}{\|x_0\|}. \tag{14}$$

Так как неравенство (14) выполняется для всех $x_0 \in R^n$, то аналогично предыдущей теореме, взяв $\rho = \frac{1}{2\gamma\sigma\sqrt{m}} \cdot \max\limits_{x_0} \frac{|\xi^T x_0|}{\|x_0\|} - \frac{1}{2\gamma\sigma\sqrt{m}}$, будем иметь $|\xi^T Q(t_0,t^*)e_k| > \rho > \frac{1}{2\gamma\sigma\sqrt{m}} \cdot \frac{|\xi^T x_0|}{\|x_0\|}$.

Так как $\|e_k\|=1$, $e_k \in R^m$, то, положив $\nu = e_k$, получим, что для всех $x_0 \in R^n$ выполняется неравенство (12). Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность Е.К. Макарову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Колмогоров А.Н., Фомин С.В.*** Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1976. – С. 223.
2. ***Kalman R.E.*** Contribution to the theory of optimal control // Bol. Soc. mathem. mexic., 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102–119.
3. ***Тонков Е.Л.*** Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения, 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
4. ***Тонков Е.Л.*** Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы // Докл. АН СССР, 1981. – Т. 256, № 2. – С. 290–294.
5. ***Тонков Е.Л.*** К теории линейных управляемых систем. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. ИММ УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1984.
6. ***Попова С.Н.*** Задачи управления показателями Ляпунова. Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Ижевск, 1992.
7. ***Макаров Е.К., Попова С.Н.*** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения, 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.
8. ***Калман Р., Фалб П., Арбиб М.*** Очерки по математической теории систем. – М., 1971.
9. ***Хорн Р., Джонсон Ч.*** Матричный анализ. – М., 1989. – С. 378.

S U M M A R Y

We consider system of ordinary differential equations with piecewise continuous coefficients. The system is linear with respect to state and linear with respect to control. Equivalency of definitions of uniformly totally controllability of such system both by Calman and by Tonkov is proved. This fact allows to prove existence of control impulses for uniformly totally controllable by Tonkov system.

Поступила в редакцию 30.11.2004