УДК 512.542

Н.Т. Воробьев, В.В. Шпаков

О факторизациях классов Фиттинга

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ классы Фиттинга и $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-радикал группы G. Тогда произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс $\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{H}$ всех тех групп, для которых $G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H}$ [1]. Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ называют локальным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Хорошо известно, что произведение двух любых локальных классов Фиттинга локально [2]. Однако обратное в общем случае неверно, что доказано Н.Т. Воробьевым и А.Н. Скибой [3].

В связи с этим возникает задача нахождения критерия локальности произведения классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Основной результат настоящей работы – доказательство такого критерия для классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ в случае, когда $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Заметим, что критерий локальности произведений формаций был установлен Л.А. Шеметковым [4].

1. Предварительные сведения. Для доказательства основного результата напомним некоторые основные понятия и приведем в качестве лемм те известные утверждения, которые мы будем использовать.

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;
2) из того, что нормальные подгруппы N_1 и N_2 группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение N_1N_2 принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется *$\mathfrak{F}$-радикалом* группы G, если она является максимальной из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. *Произведением классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$, или *фиттинговым произведением,* называется класс всех тех групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ – пустой класс групп, то по определению полагают, что $\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{H}=\varnothing$.

Отображение f:**P**→{классы Фиттинга}, где **P** – множество всех простых чисел, называют *функцией Хартли,* или *H-функцией.* Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *локальным* [5], если существует такая функция Хартли f, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$, где $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p\in\mathbf{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$, $\mathfrak{E}_\pi$ – класс всех π-групп, $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп, $\mathfrak{E}_{p'}$ – класс всех p'-групп. В этом случае f называется H-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом,* или *Q-замкнутым,* если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Теперь приведем леммы, которые будем использовать.

Лемма 1.1. [6]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *для каждого* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H} \neq \varnothing$;

2) *если* $\mathfrak{H}$ *– гомоморф, то* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Лемма 1.2. [6]. *Если* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга, то произведение классов Фиттинга вида* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ *– локальный класс Фиттинга.*

Лемма 1.3. [2]. *Произведение двух любых локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга.*

Непосредственной проверкой легко показать, что справедлива

Лемма 1.4. *Пересечение любого непустого множества локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга.*

2. О факторизациях с локальным множителем. Вначале мы изучим представление классов Фиттинга в виде произведения двух классов Фиттинга, один из которых локален.

Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то через $\mathrm{lFit}\mathfrak{F}$ обозначим *наименьший локальный класс Фиттинга*, содержащий класс $\mathfrak{F}$.

Пусть n – натуральное число и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда *n-й степенью* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем произведение n сомножителей, каждый из которых равен $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}\cdot\mathfrak{F}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{F}$ (n-сомножителей).

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *π-насыщенным*, если $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, где π – некоторое множество простых чисел, а $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп.

Лемма 2.1. *Если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *такие классы Фиттинга, что* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$, *то для любого класса Фиттинга* $\mathfrak{X}$, *который является гомоморфом, имеет место включение* $\mathfrak{F}\mathfrak{X} \subset \mathfrak{H}\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{X}$. По определению фиттингова произведения $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$, то, применяя теорему об изоморфизмах, получаем $G/G_{\mathfrak{F}} \,/\, G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}} \cong G/G_{\mathfrak{H}}$. Но $\mathfrak{X}$ – гомоморф. Следовательно, из того, что факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$, получаем, что и факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}} \,/\, G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Отсюда, по определению класса групп $G/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{X}$ и поэтому $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{X}$.

Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть множество простых чисел* $\varnothing \subset \pi \subset \mathbb{P}$ *и класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *таковы, что* $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. *Тогда произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *факторизуются в виде* $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$ *в каждом из следующих случаев:*

1) $\mathfrak{H}$ *– π-насыщен;*

2) $\mathfrak{H}$ *– Q-замкнут и* $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^2$.

Доказательство. Исходя из условия $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$, по лемме 2.1, следует $(\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{E}_{\pi'}$.

Учитывая свойство ассоциативности $(\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Следовательно, $(\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. По определению оператора «lFit» имеем $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{lFit}\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2.1 получаем $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq (\mathrm{lFit}\,\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$. Таким образом $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$.

Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ – π-насыщен. Тогда $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ и поэтому, $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H})$. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{H} = ((\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{H}$. Используя снова ассоциативность и π-насыщенность класса $\mathfrak{H}$, получаем $((\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{H} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H}) = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathfrak{H}$ такой Q-замкнутый класс Фиттинга, что $\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^2$.

Покажем, что в этом случае $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^2$. Так как $\mathfrak{H}$ – гомоморф, то по лемме 2.1 $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}$.

С другой стороны, $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{lFit}\mathfrak{F}$ и класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ является Q-замкнут. Тогда по лемме 2.1 справедливо $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$. Но по условию $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ и, следовательно, справедливо включение $(\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{H}$. Используя свойство ассоциативности, из включения $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ по лемме 2.1, следует $(\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{H} =$ $= \mathfrak{F}(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Теорема доказана.

Следствие 2.4. *Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ – локальный класс Фиттинга и $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$.*

Доказательство. По утверждению 1 леммы 1.1 справедливо включение $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. По условию $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ – локальный класс Фиттинга. Но $\mathrm{lFit}\mathfrak{F}$ – наименьший из всех локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$, то есть выполняются условия теоремы. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{H}$.

Следствие доказано.

3. Основной результат. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным, если $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\omega}$, для некоторого непустого множества простых чисел ω.

Теорема 3.1. *Пусть $\omega = \pi(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является локальным в том и только том случае, когда $\mathfrak{F}$ – ω'-локальный класс Фиттинга.*

Доказательство. По условию $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга, и, значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\omega} \cap (\cap_{p\in\omega} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}(\mathfrak{E}_{\omega} \cap (\cap_{p\in\omega} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}))$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega} \cap (\cap_{p\in\omega}\mathfrak{F}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}))$.

Ввиду леммы 1.2 произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ является локальным классом Фиттинга и, следовательно, по лемме 1.4 $\cap_{p\in\omega}\mathfrak{F}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ – локальный класс Фиттинга.

Рассмотрим теперь произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$. Так как $\mathfrak{F}$ – ω'-локальный класс Фиттинга, то $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\omega}$. Но $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\omega} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$, и поэтому $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$. Отсюда по утверждению 2 леммы 1.1 $(\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\omega} \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega})\mathfrak{E}_{\omega}$. Используя свойство ассоциативности умножения классов Фиттинга заключаем, что $(\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega})\mathfrak{E}_{\omega} = \mathfrak{F}(\mathfrak{E}_{\omega}\mathfrak{E}_{\omega}) = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$. Следовательно, $(\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\omega} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$.

С другой стороны, так как $\mathfrak{F} \subset \mathrm{lFit}\mathfrak{F}$, то по утверждению 2 леммы 1.1 получаем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega} \subseteq (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\omega}$.

Следовательно, справедливо равенство

$$\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega} = (\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\omega} \tag{1}$$

Так как классы Фиттинга $\mathrm{lFit}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{E}_{\omega}$ – локальны, то по лемме 1.3 $(\mathrm{lFit}\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\omega}$ – локальный класс Фиттинга. Следовательно, ввиду (1), $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$ – локальный класс Фиттинга. Но тогда произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально по лемме 1.4, как пересечение локальных классов Фиттинга, $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\omega}$ и $\cap_{p\in\omega}\mathfrak{F}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$.

Докажем обратное утверждение.

По утверждению 2 леммы 1.1 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Используя определение оператора «lFit», получаем $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{lFit}(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$. Так как по условию $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathrm{lFit}(\mathfrak{F}\mathfrak{H}) = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Кроме того, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ – локальный класс и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Тогда по определению оператора «lFit»: $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Итак, $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Отсюда получаем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H})$. Так как $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}$, а $\omega=\pi(\mathfrak{H})$, то $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})} = \mathfrak{N}_{\omega}$.

Значит, $\mathrm{lFit}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\omega}$ и $\mathfrak{F}$ – ω'-локальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite Solvable Groups. Walter de Gryeter. – Berlin–New York–Tokio, 1992.
2. ***Воробьев Н.Т.*** Локальные произведения классов Фиттинга // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1991, № 6. – С. 28–32.
3. ***Воробьев Н.Т., Скиба А.Н.*** О локальных произведениях классов Фиттинга // Вопросы алгебры. Вып. 8. – Гомель, 1995. – С. 55–58.
4. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. – М., 1989. – 255 с.
5. ***D'Arcy P.*** Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc., 1975. – Vol. 20, 1. – P. 25–32.
6. ***Воробьев Н.Т.*** О радикальных классах групп с условием Локетта // Матем. заметки, 1988. – Т. 43. – Вып. 2. – С. 161–168.

SUMMARY

It is proved, that if $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ are Fitting classes, then Fitting product $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ is local if and only if $\mathfrak{F}$ is ω'-local ($\omega = \pi(\mathfrak{H})$) and $\mathfrak{H}$ is local.

Поступила в редакцию 21.02.2005