

УДК 539.3

**Т.В. Никонова**

## **Асимптотический подход в оценке НДС тонкостенной цилиндрической трубы, залегающей в грунте с переменным коэффициентом постели**

Рассматривается задача о расчете напряженно-деформированного состояния тонкостенной цилиндрической трубы (оболочки) кругового сечения, залегающей в грунте. Воздействие внешнего упругого заполнителя (грунта) принимаем в предположении гидростатического характера его давления на конструкцию с учетом реакции заполнителя в рамках модели Фусса-Винклера.

Предполагается, что коэффициент постели грунта  $\alpha$  слабо зависит от глубины залегания трубы и изменяется по линейному закону. Длину конструкции в поперечном направлении считаем достаточно большой, так что граничными условиями на ее торцах пренебрегаем.

Рассмотрим безразмерные уравнения равновесия тонкой оболочки [1]:

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - T + q_n = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} + Q + q_2 = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \varphi} - Q = 0, \quad (1)$$

где  $T$ ,  $Q$ ,  $M$  – безразмерные кольцевое усилие, перерезывающее усилие и момент, соответственно, возникающие в срединной поверхности оболочки,  $\varphi$  – угловая координата,  $q_n$ ,  $q_2$  – безразмерные нормальное и касательное усилия, приходящиеся на единицу площади поверхности оболочки. Здесь

$$q_n = q_n^z + q_n^c + q_n^n, \quad q_n^z = -\gamma_{zp} R [H_0 + \kappa(1 - \cos \varphi)] / Eh, \quad q_n^c = -\gamma R / E \cos \varphi, \quad (2)$$

$$q_n^n = -\frac{\alpha(\varphi)R}{Eh} w, \quad q_2 = q_2^c = \gamma \bar{\kappa} / E \sin \varphi, \quad \alpha(\varphi) = \alpha_0 [1 + \mu R / H_0 (1 - \cos \varphi)],$$

где  $q_n^z$ ,  $q_n^c$ ,  $q_n^n$  – нормальные составляющие нагрузки, вызванные действием грунта, веса оболочки и реакцией грунта (винклеровского основания), соответственно,  $q_2^c$  – касательная составляющая нагрузки, вызванная весом оболочки,  $H_0$  – глубина залегания оболочки,  $\gamma_{zp}$  – удельный вес грунта,  $\gamma$  – удельный вес материала оболочки,  $R$  – радиус оболочки,  $h$  – толщина цилиндрической оболочки,  $E$  – модуль Юнга материала оболочки,  $\alpha_0$ ,  $\mu$  – параметры, определяемые экспериментально, причем  $1 \gg \mu$  – малый параметр.

Уравнения равновесия (1) дополним уравнениями физического состояния, связывающими  $T$ ,  $Q$  и  $M$  с безразмерными перемещениями  $w$  и  $v$  [1]:

$$T = \frac{1}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right), \quad M = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad (3)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Решение уравнений (1), (3) будем строить в виде разложений по степеням малого параметра  $\mu$

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j T_j, \quad Q = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j Q_j, \quad M = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j M_j, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j v_j, \quad w = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j. \quad (4)$$

С учетом (4), (1) в нулевом приближении сводится к следующей системе уравнений

$$\left( 1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} - \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - \tilde{q}_{2s} \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^4} - w_0 - \tilde{\alpha} w_0 + \tilde{q}_{n0} + \tilde{q}_{nc} \cos \varphi = 0,$$

где

$$\tilde{q}_{2s} = \frac{R\gamma(1-\nu^2)}{E}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_0 R(1-\nu^2)}{Eh}, \quad (6)$$

$$\tilde{q}_{n0} = \frac{\gamma_{zp}(1-\nu^2)R(H_0 + R)}{Eh}, \quad \tilde{q}_{nc} = \frac{(\gamma_{zp}R - \gamma h)R(1-\nu^2)}{Eh}.$$

Решение  $w_0$  ищем в виде

$$w_0 = w_{00} + w_{01} \cos \varphi, \quad v_0 = v_{00} + v_{01} \sin \varphi. \quad (7)$$

Подставив (7) в (5) и приравняв коэффициенты, независимые от  $\varphi$ , а также

при  $\cos\varphi$ ,  $\sin\varphi$ , получим

$$w_{00} = \frac{\tilde{q}_{n0}}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad w_{01} = \frac{\tilde{q}_{nc} - \tilde{q}_{2s}}{\alpha}, \quad v_{00} = 0, \quad v_{01} = -w_{01} + \frac{12R^2 \tilde{q}_{2s}}{12R^2 + h^2}. \quad (8)$$

В первом приближении имеем следующую систему уравнений

$$\left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} = \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}, \quad (9)$$

$$\frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial \varphi^4} - w_1 - \tilde{\alpha} w_1 - \tilde{\alpha} R / H_0 (1 - \cos \varphi) w_0 = 0.$$

Решение  $w_1$  ищем в виде

$$w_1 = w_{10} + w_{11} \cos \varphi + w_{12} \cos 2\varphi, \quad v_1 = v_{10} + v_{11} \sin \varphi + v_{12} \sin 2\varphi. \quad (10)$$

Действуя, как и в нулевом приближении, получим

$$w_{10} = \frac{R\tilde{\alpha}}{H_0(1 + \tilde{\alpha})} (w_{01} / 2 - w_{00}), \quad w_{11} = \frac{R}{H_0} (w_{00} - w_{01}),$$

$$w_{12} = \frac{R\tilde{\alpha} w_{01}}{2H_0(\tilde{\alpha} + 9h^2 / (12R^2 + h^2))}, \quad v_{10} = 0, \quad v_{11} = -w_{11}, \quad (11)$$

$$v_{12} = -\frac{2(h^2 + 3R^2)}{12R^2 + h^2} w_{12}.$$

Система уравнений для второго приближения получается из (5) увеличением соответствующих индексов при переменных на 1. Ее решение может быть записано в виде:

$$w_2 = w_{20} + w_{21} \cos \varphi + w_{22} \cos 2\varphi + w_{23} \cos 3\varphi, \quad v_2 = v_{20} + v_{21} \sin \varphi + v_{22} \sin 2\varphi + v_{23} \sin 3\varphi. \quad (12)$$

Тогда

$$w_{20} = -\frac{R\tilde{\alpha}}{H_0(1 + \tilde{\alpha})} (w_{11} / 2 - w_{10}), \quad w_{21} = \frac{R}{H_0} (w_{10} - w_{11} + w_{12} / 2),$$

$$w_{22} = \frac{R\tilde{\alpha}}{H_0(\tilde{\alpha} + 9h^2 / (12R^2 + h^2))} (w_{11} / 2 - w_{12}),$$

$$w_{23} = -\frac{R\tilde{\alpha} w_{12}}{2H_0(\tilde{\alpha} + 64h^2 / (12R^2 + h^2))},$$

$$v_{20} = 0, \quad v_{21} = -w_{21}, \quad v_{22} = -\frac{2(h^2 + 3R^2)}{12R^2 + h^2} w_{22}, \quad v_{23} = -\frac{3h^2 + 4R^2}{12R^2 + h^2} w_{23}. \quad (13)$$

Найдем размерные величины  $T^*$ ,  $Q^*$ ,  $M^*$ , связанные с безразмерными  $T$ ,  $Q$ ,  $M$  по формулам

$$T^* = EhT, \quad Q^* = EhQ, \quad M^* = EhRM. \quad (14)$$

Из (1), (3) и (4) следует, что тангенциальное, перерезывающее усилия и моменты будут определяться по формулам:

$$T^* = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[ w_{00} + \frac{12R^2 \tilde{q}_{2s}}{12R^2 + h^2} \cos \varphi + \mu (w_{10} - \frac{3h^2}{12R^2 + h^2} w_{12} \cos 2\varphi) + \right. \\ \left. + \mu^2 (w_{20} - \frac{3h^2}{12R^2 + h^2} w_{22} \cos 2\varphi - \frac{8h^2}{12R^2 + h^2} w_{23} \cos 3\varphi) \right], \quad (15)$$

$$Q^* = -\frac{Eh^3}{(12R^2 + h^2)(1 - \nu^2)} [\tilde{q}_{2s} \sin \varphi + 6\mu w_{12} \sin 2\varphi + 6\mu^2 (w_{22} \sin 2\varphi + 4w_{23} \sin 3\varphi)], \quad (16)$$

$$M^* = \frac{Eh^3 R}{(12R^2 + h^2)(1 - \nu^2)} [\tilde{y}_{2s} \cos \varphi + 3\mu w_{12} \cos 2\varphi + \mu^2 (3w_{22} \cos 2\varphi + 8w_{23} \cos 3\varphi)]. \quad (17)$$

На основании полученных формул (15)–(17) были проведены расчеты значений усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности оболочки, залегающей в грунте с переменным коэффициентом постели. При  $\mu = 0$  полученные результаты совпадают с результатами, полученными в [2], где коэффициент постели грунта считался постоянным. На рис. 1–3 приведены графики тангенциального, перерезывающего усилий и моментов, соответственно, в зависимости от угла  $\varphi$  при  $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $h = 0.04946 \text{ м}$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $\gamma_{гр} = 1.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ ,  $\gamma = 7.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ ,  $\alpha_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $R = 1.5 \text{ м}$ ,  $H_0 = 4 \text{ м}$  и  $\mu = 0.3$ . Построенные графики показывают изменения значений усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности цилиндрической трубы, в нулевом, первом и втором приближениях.

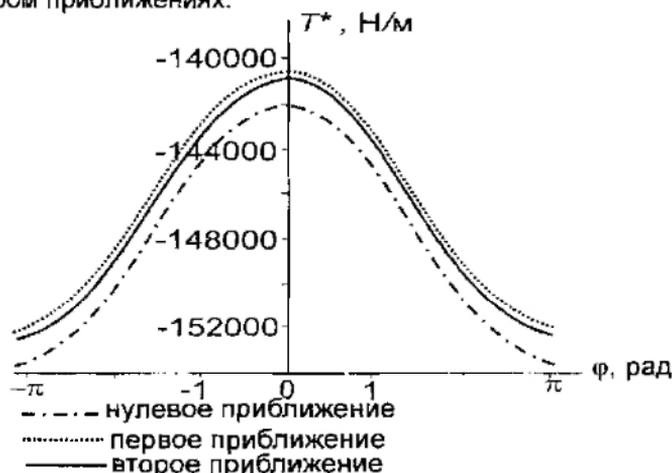


Рис. 1. Зависимость тангенциального усилия  $T^*$  от угла  $\varphi$ .

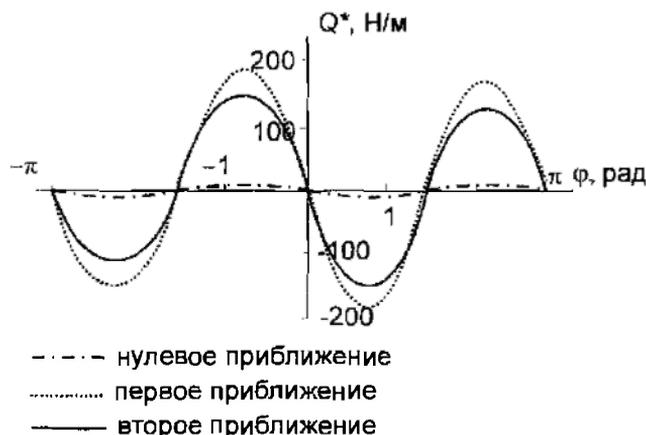


Рис. 2. Зависимость перерезывающего усилия  $Q^*$  от угла  $\varphi$ .

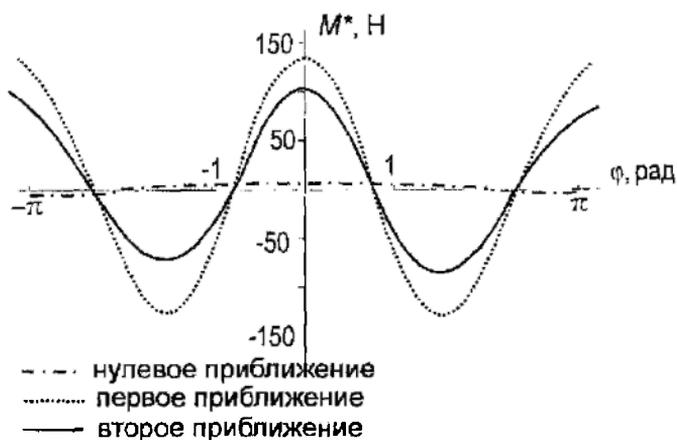


Рис. 3. Зависимость моментов  $M^*$  от угла  $\varphi$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Ленинград, 1962. – 431 с.
2. Никонова Т.В., Михасев Г.И. Оценка усилий в тонкостенной трубе с упругим внешним наполнителем с учетом собственного веса // Весник ВДУ, 2003, № 2. – С. 105–108.

### S U M M A R Y

*The problem on calculation of the strain-stress state of a thin cylindrical pipe with elastic external filler is considered. The pipe length is assumed to be sufficiently long so that the boundary conditions on the pipe edges are not taken into account. The one-dimensional Fuss-Winkler's model of the pipe-ground deformation is accepted, the modulus of subgrade reaction depending on the pipe laying depth.*

*Поступила в редакцию 22.06.2004*