УДК 512.548

А.М. Гальмак

О конгруэнциях и трансляциях n-арной группы

n-Арные группы выделяются среди всех универсальных алгебр рядом присущих им замечательных свойств, редко встречающихся у других универсальных алгебр. Перечислим некоторые из таких свойств, связанных с конгруэнциями:

1) любые две конгруэнции n-арной группы перестановочны [1];

2) n-арная группа имеет модулярную решетку конгруэнций [1];

3) в n-арной группе любые две конгруэнции, имеющие общий смежный класс, совпадают [1];

4) в n-арной группе все смежные классы по одной и той же конгруэнции имеют одинаковую мощность [2];

5) класс конгруэнции n-арной группы, включающий в себя n-арную подгруппу, является полуинвариантной n-арной подгруппой [2];

6) любой класс конгруэнции n-арной группы можно выразить через один и тот же класс этой же конгруэнции [3].

Согласно теореме Биркгофа ([4], теорема VII.3.4), свойство 2) является следствием 1). Свойство 2), ввиду теоремы Хагемана [5], следует также и из 3). В свою очередь свойство 3), ввиду теоремы 32.4 [6], вытекает из 4).

Отметим, что, согласно теореме Биркгофа ([4], теорема VII.3.4), свойство 2) является следствием 1). Свойство 2), ввиду теоремы Хагемана [5], следует также и из 3). В свою очередь свойство 3), ввиду теоремы 32.4 [6], вытекает из 4).

В данной работе продолжаются исследования автора, посвященные конгруэнциям и трансляциям n-арных групп.

Следующая лемма является частным случаем соответствующей теоремы А.И. Мальцева для произвольных универсальных алгебр [7].

Лемма 1 (А.И. Мальцев). *Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа. Тогда:*

1) если ρ и t ее конгруэнция и элементарная трансляция соответственно, то из $(x, y) \in \rho$ следует $(t(x), t(y)) \in \rho$;

2) если ρ – отношение эквивалентности, определенное на $< A, [\,] >$ и из $(x, y) \in \rho$ следует

$$([a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n], [a_1 \ldots a_{i-1}ya_{i+1} \ldots a_n]) \in \rho$$

для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого $i = 1, \ldots, n$, то ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$.

Теорема 1. *Если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, то*

$$t(\rho(x)) = \rho(t(x))$$

для любых ее элементарной трансляции t и конгруэнции ρ. В частности,

$$[x_1 \ldots x_{i-1}\rho(x_i)x_{i+1} \ldots x_n] = \rho([x_1 \ldots x_n]).$$

для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$.

Доказательство. Если $u \in t(\rho(x))$, то $u = t(y)$ для некоторого $y \in \rho(x)$. Тогда из $(x, y) \in \rho$, ввиду леммы Мальцева, следует $(t(x), t(y)) \in \rho$, откуда $u = t(y) \in \rho(t(x))$. Следовательно, $t(\rho(x)) \subseteq \rho(t(x))$.

Пусть $v \in \rho(t(x))$. Так как t – подстановка на A, то $v = t(w)$ для некоторого $w \in A$. А так как t^{-1} – элементарная трансляция, то из $(t(w), t(x)) \in \rho$, ввиду леммы Мальцева, следует

$$(t^{-1}t(w), t^{-1}t(x)) \in \rho, \ (w, x) \in \rho, \ t^{-1}(v) \in \rho(x),$$

откуда

$$t\,t^{-1}(v) \in t(\rho(x)), \ v \in t(\rho(x)).$$

Следовательно, $\rho(t(x)) \subseteq t(\rho(x))$ и верно первое требуемое равенство. Второе равенство получается из первого, если в последнем считать t главными трансляциями. Теорема доказана.

Замечание. Равенство $t(\rho(x)) = \rho(t(x))$ из теоремы 3 останется верным, если в ней n-арную группу $< A, [\,] >$ заменить универсальной алгеброй $< A, \Omega >$, а t считать производной унарной операцией, являющейся подстановкой на A, для которой обратная подстановка t^{-1} также является производной операцией.

Лемма 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_{n-2}, c$ – фиксированные элементы n-арной полугруппы $< A, [\,] >$, ρ – ее отношение эквивалентности. Если*

$$\rho(x) = [xa_1 \ldots a_{n-2}\rho(c)] = [a_1 \ldots a_{n-2}\rho(c)x] \qquad (1)$$

для любого $x \in A$, то ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$.

Доказательство. Для сокращения записей положим $\alpha = a_1 \ldots a_{n-2}$ и пусть

$$\rho(x_i) = [x_i\alpha\rho(c)], \ i = 1, \ldots, n$$

произвольные классы эквивалентности. Тогда

$$\begin{aligned}
[\rho(x_1) \ldots \rho(x_n)] &= [[x_1\alpha\rho(c)][x_2\alpha\rho(c)] \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \\
&= [x_1[\alpha\rho(c)x_2]\alpha\rho(c) \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \\
&= [x_1[x_2\alpha\rho(c)]\alpha\rho(c)[x_3\alpha\rho(c)] \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \\
&= [x_1x_2\alpha\rho(c)[\alpha\rho(c)x_3]\alpha\rho(c) \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \\
&= [x_1x_2\alpha\rho(c)[x_3\alpha\rho(c)]\alpha\rho(c) \ldots [x_n\alpha\rho(c)] = \\
&= [x_1x_2[\alpha\rho(c)x_3]\alpha\rho(c)\alpha\rho(c) \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \\
&= [x_1x_2[x_3\alpha\rho(c)]\alpha\rho(c)\alpha\rho(c) \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \\
&= [x_1x_2x_3\alpha\rho(c)\alpha\rho(c)\alpha\rho(c) \ldots [x_n\alpha\rho(c)]] = \ldots \\
\ldots &= [[x_1x_2 \ldots x_n]\underbrace{\alpha\rho(c)\alpha\rho(c) \ldots \alpha\rho(c)}_{n}],
\end{aligned}$$

т.е.

$$[\rho(x_1)\ \dots\ \rho(x_n)] = [[x_1x_2 \dots x_n]\alpha[\rho(c)\underbrace{\alpha\rho(c)\dots\alpha\rho(c)}_{n-1}]]. \qquad (2)$$

Если $y \in \rho(c)$, то по условию $\rho(y) = [y\alpha\rho(c)]$, откуда, учитывая $\rho(y) = \rho(c)$, получаем $\rho(c) = [y\alpha\rho(c)]$. Так как последнее равенство справедливо для любого $y \in \rho(c)$, то $\rho(c) = [\rho(c)\alpha\rho(c)]$, откуда

$$\rho(c) = [\rho(c)\underbrace{\alpha\rho(c)\dots\alpha\rho(c)}_{n-1}].$$

Тогда из (2), учитывая последнее равенство, получаем

$$[\rho(x_1)\ \dots\ \rho(x_n)] = [[x_1x_2 \dots x_n]\alpha\rho(c)].$$

А так как по условию $\rho([x_1x_2 \dots x_n]) = [[x_1x_2 \dots x_n]\alpha\rho(c)]$,

то $$[\rho(x_1)\ \dots\ \rho(x_n)] = \rho([x_1x_2 \dots x_n]).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.

Лемма 3. *Пусть $a_1, \dots, a_{n-2}$, c – фиксированные элементы, ρ – отношение эквивалентности n-арной группы $< A, [\,] >$. Если*

$$\rho(x) = [\rho(c)a_1 \dots a_{n-2}x] = [x\rho(c)a_1 \dots a_{n-2}] \qquad (3)$$

для любого $x \in A$, то ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$.

Теорема 2. *Пусть ρ – отношение эквивалентности, определенное на n-арной группе $< A, [\,] >$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$;

2) существуют $a_1, \dots, a_{n-2}$, $c \in A$ такие, что для любого $x \in A$ верно (1);

3) существует $a \in A$ такой, что для любого $x \in A$ верно

$$\rho(x) = [x\underbrace{a \dots a}_{n-3}\,\bar{a}\,\rho(a)] = [\underbrace{a \dots a}_{n-3}\,\bar{a}\,\rho(a)x], \qquad (4)$$

4) существует $a \in A$ такой, что для любого $x \in A$ верно

$$\rho(x) = [x\underbrace{a \dots a}_{n-2}\rho(\bar{a})] = [\underbrace{a \dots a}_{n-2}\rho(\bar{a})x]; \qquad (5)$$

5) существуют $a_1, \dots, a_{n-2}$, $c \in A$ такие, что для любого $x \in A$ верно (3);

6) существует $a \in A$ такой, что для любого $x \in A$ верно

$$\rho(x) = [\rho(a)\underbrace{a \dots a}_{n-3}\,\bar{a}\,x] = [x\rho(a)\underbrace{a \dots a}_{n-3}\,\bar{a}\,]; \qquad (6)$$

7) существует $a \in A$ такой, что для любого $x \in A$ верно

$$\rho(x) = [\rho(\bar{a})\underbrace{a \dots a}_{n-2}x] = [x\rho(\bar{a})\underbrace{a \dots a}_{n-2}]. \qquad (7)$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Положив в теоремах 1 и 2[3] $i = n - 2$, видим, что для любых $a_1, \dots, a_{n-2}$ существует зависящий от них c, такой, что для любого $x \in A$ верно (1).

1) $\Rightarrow$ 3) Положив в теоремах 1 и 2[3] $i = n-2$, $a_1 = \ldots = a_{n-3} = a$, $a_{n-2} = \bar{a}$, получим $c = a$ и для любого $x \in A$ верно (4).

1) $\Rightarrow$ 4) Положив в теоремах 1 и 2[3] $i = n-2$, $a_1 = \ldots = a_{n-2} = a$, получим $c = \bar{a}$ и для любого $x \in A$ верно (5).

1) $\Rightarrow$ 5) Полагаем в теоремах 1 и 2[3] $i = 0$.

1) $\Rightarrow$ 6) Положив в теоремах 1 и 2[3] $i = 0$, $a_1 = \ldots = a_{n-3} = a$, $a_{n-2} = \bar{a}$, получим $c = a$ и для любого $x \in A$ верно (6).

1) $\Rightarrow$ 7) Положив в теоремах 1 и 2[3] $i = 0$, $a_1 = \ldots = a_{n-2} = a$, получим $c = \bar{a}$ и для любого $x \in A$ верно (7).

2), 3), 4) $\Rightarrow$ 1) Применяется лемма 2.

5), 6), 7) $\Rightarrow$ 1) Применяется лемма 3. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть ρ – отношение эквивалентности, определенное на тернарной группе $< A, [\,] >$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$;

2) существуют $a, b \in A$ такие, что $[xa\rho(b)] = [a\rho(b)x]$ для любого $x \in A$;

3) существует $a \in A$ такой, что $\rho(x) = [x\bar{a}\rho(a)] = [\bar{a}\rho(a)x]$ для любого $x \in A$;

4) существует $a \in A$ такой, что $\rho(x) = [xa\rho(\bar{a})] = [a\rho(\bar{a})x]$ для любого $x \in A$;

5) существуют $a, b \in A$ такие, что $[\rho(b)ax] = [x\rho(b)a]$ для любого $x \in A$;

6) существует $a \in A$ такой, что $\rho(x) = [\rho(a)\bar{a}x] = [x\rho(a)\bar{a}]$ для любого $x \in A$;

7) существует $a \in A$ такой, что $\rho(x) = [\rho(\bar{a})ax] = [x\rho(\bar{a})a]$ для любого $x \in A$.

Теорема 3. *Пусть ρ – отношение эквивалентности, определенное на n-арной группе $< A, [\,] >$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$;

2) из $(x, y) \in \rho$ следует $([a_1xa_3 \ldots a_n], [a_1ya_3 \ldots a_n]) \in \rho$ для любых $a_1, a_3, \ldots, a_n \in A$;

3) из $(x, y) \in \rho$ следует $([a_1 \ldots a_{n-2}xa_n], [a_1 \ldots a_{n-2}ya_n]) \in \rho$ для любых $a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n \in A$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2), 1 $\Rightarrow$ 3) Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1) Если t – произвольная главная трансляция n-арной группы $< A, [\,] >$, то, согласно [8], ее можно представить в виде произведения $t = t_1 \ldots t_k$ главных трансляций $t_1, \ldots, t_k$ вида

$$x \to [a_1xa_3 \ldots a_n],$$

где $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда, если $(x, y) \in \rho$, то , применяя k раз условие 2, получаем

$$(t_1(x), t_1(y)) \in \rho,\ (t_1t_2(x), t_1t_2(y)) \in \rho,\ \ldots,\ (t_1\ldots t_k(x), t_1\ldots t_k(y)) \in \rho,$$

т.е. $(t(x), t(y)) \in \rho$. Так как это справедливо для любой главной трансляции n-арной группы $< A, [\,] >$, по лемме Мальцева ρ – конгруэнция на $< A, [\,] >$.

3) $\Rightarrow$ 1) Доказывается аналогично 2) $\Rightarrow$ 1). Теорема доказана.

Следствие 2. Отношение эквивалентности ρ, определенное на тернарной группе $< A, [\,] >$, является конгруэнцией на ней тогда и только тогда, когда из $(x, y) \in \rho$ следует $([axb], [ayb]) \in \rho$ для любых $a, b \in A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Monk J.D., Sioson F.M.*** On the general theory of m-groups // Fund. Math., 1971, № 72. – P. 233–244.
2. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. – Мн., 1999.
3. ***Гальмак А.М.*** О смежных классах конгруэнции полиадической группы // Веснік ВДУ, 2002, № 2(24). – С. 114–118.
4. ***Биркгоф Г.*** Теория решеток. – М., 1984.

5. **Hagemann J.** On regular and weakly regular congruences. Preprint TH Darmstadt., 1973, № 75.
6. **Смирнов Д.М.** Многообразия алгебр. – Новосибирск, 1992.
7. **Мальцев А.И.** К общей теории алгебраических систем // Мат. сборник, 1954, 35, № 1. – С. 3–20.
8. **Гальмак А.М.** Трансляции n-арных групп // Доклады АН БССР, 1986, 30, № 8. – С. 677–680.

S U M M A R Y

In this paper the translations and classes of congruence on polyadic group are studied.

Поступила в редакцию 4.11.2003