УДК 512.542

В.Г. Сафонов

О кратно насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3

В работе рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в монографиях [1–3]. Напомним некоторые из них.

Всякую формацию конечных групп называют 0-кратно насыщенной. При $n > 1$ формацию F называют n-кратно насыщенной, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого $(n-1)$-кратно насыщенные формации.

Если $\mathbf{X}$ – класс групп, тогда через $l_n\mathrm{form}\mathbf{X}$ обозначают пересечение всех n-кратно насыщенных формаций, содержащих $\mathbf{X}$. Для любых n-кратно насыщенных формаций $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ полагают $\mathbf{F} \vee_n \mathbf{M} = l_n\mathrm{form}(\mathbf{F} \cup \mathbf{M})$. Относительно операций $\vee_n$ и $\cap$ совокупность всех n-кратно насыщенных формаций l_n образует полную модулярную решетку. Формации из l_n называют l_n-формациями. Для всякой l_n-формации $\mathbf{F}$ через F_n обозначается минимальный внутренний $(n-1)$-кратно локальный экран.

Пусть $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ произвольные l_n-формации. Тогда $\mathbf{H}$-дефектом n-кратно насыщенной формации $\mathbf{F}$ (или $\mathbf{H}_n$-дефектом) называют длину решетки $\mathbf{F}/_n\, \mathbf{H} \cap \mathbf{F}$ (конечную или бесконечную) l_n-формаций, заключенных между $\mathbf{H} \cap \mathbf{F}$ и $\mathbf{F}$, и обозначают $|\mathbf{F} : \mathbf{H} \cap \mathbf{F}|_n$. В случае, когда $\mathbf{H} = \mathbf{N}$ – формация всех нильпотентных групп, $\mathbf{N}_n$-дефект l_n-формации называют ее нильпотентным дефектом. l_n-Формация $\mathbf{F}$ называется неприводимой (или l_n-неприводимой), если $\mathbf{F} \neq l_n\mathrm{form}(\cup_{i\in I} \mathbf{X}_i)$, где $\{ \mathbf{X}_i \mid i \in I \}$ – набор всех собственных n-кратно насыщенных подформаций из $\mathbf{F}$, если же $\mathbf{F} = l_n\mathrm{form}(\cup_{i\in I} \mathbf{X}_i)$, то формация $\mathbf{F}$ называется l_n-приводимой.

Задача изучения и классификации насыщенных формаций нильпотентного дефекта 3 поставлена в монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [2] (проблема 20.9). Решению этой задачи, а также изучению свойств кратно насыщенных формаций, имеющих ограниченный нильпотентный дефект, посвящены работы автора [4–7]. В работе [4] установлен ряд общих свойств нильпотентного дефекта n-кратно насыщенной формации, а также дана классификация n-кратно насыщенных формаций нильпотентного дефекта < 2.

В данной работе мы даем описание l_n-формаций с нильпотентным дефектом 3, в случае когда $n > 2$.

В дальнейшем, через $\mathbf{S}$, $\mathbf{N}_p$ будем обозначать формацию всех разрешимых и всех p-групп, соответственно (p – некоторое простое число).

Нам понадобятся некоторые результаты работы [4].

Лемма 1 ([4, лемма 5]). *Пусть $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ – l_n-формации, где $\mathbf{M} \subset \mathbf{F}$. Тогда*

$$|\mathbf{M} : \mathbf{H} \cap \mathbf{M}|_n < |\mathbf{F} : \mathbf{H} \cap \mathbf{F}|_n.$$

Лемма 2 ([4, лемма 6]). *Пусть $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ – l_n-формации, причем $\mathbf{F} = \mathbf{M} \vee_n \mathbf{X}$. Тогда если m, k и t – соответственно $\mathbf{H}_n$-дефекты формаций $\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{F}$* то $t < m + k$.

Лемма 3 ([4, лемма 9]). *Пусть* $\boldsymbol{M}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *– произвольные* l_n*-формации, имеющие конечный нильпотентный дефект,* $n > 1$. *Тогда*

$|\boldsymbol{F} \vee_n \boldsymbol{M} : \boldsymbol{N} \cap (\boldsymbol{F} \vee_n \boldsymbol{M})|_n = |\boldsymbol{F} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{F}|_n + |\boldsymbol{M} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{M}|_n - |\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{M} : \boldsymbol{N} \cap (\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{M})|_n$.

Лемма 4 ([4, теорема 1]). *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– приводимая* l_n*-формация,* $n \geq 1$. *Тогда и только тогда* $|\boldsymbol{F} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{F}|_n = k$ $(k > 1)$, *когда* $\boldsymbol{F}$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H} \vee_n \boldsymbol{M}$, *где* $\boldsymbol{H}$ *– неприводимая* l_n*-формация и* $|\boldsymbol{H} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{H}|_n = t$, $1 < t \leq k - 1$, а $\boldsymbol{M}$ *– такая* l_n*-формация, что* $|\boldsymbol{M} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{M}|_n = k - 1$ и $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{M}$ *– максимальная* l_n*-подформация формации* $\boldsymbol{H}$,

2) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H} \vee_n \boldsymbol{M}$, *где* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$, а $\boldsymbol{H}$ *– такая неприводимая* l_n*-формация, что* $|\boldsymbol{H} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{H}|_n = k$ *и* $\boldsymbol{M} \not\subset \boldsymbol{H}$.

Лемма 5 ([4, лемма 12]). *При* $n \geq 2$ *всякая* l_n*-формация, имеющая нильпотентный дефект 2, приводима.*

Лемма 6 ([4, теорема 2]). *Тогда и только тогда* l_n*-формация* $\boldsymbol{F}$ *имеет нильпотентный дефект* 2 $(n > 2)$, *когда* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}_1 \vee_n \boldsymbol{H}_2 \vee_n \boldsymbol{M}$, *где* $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$, а $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ *– различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации.*

Лемма 7. *При* $n > 2$ *любая* l_n*-формация с нильпотентным дефектом 3 разрешима.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{F}$ – l_n-формация с нильпотентным дефектом 3. Предположим, что $\boldsymbol{F} \not\subset \boldsymbol{S}$ и пусть G – группа минимального порядка из $\boldsymbol{F} \setminus \boldsymbol{S}$. Тогда G – монолитическая группа с минимальной нормальной неабелевой подгруппой $P = G^{\boldsymbol{S}}$. Пусть $\boldsymbol{H} = l_n\mathrm{form}G$. Так как P – неабелева группа, то $|\pi(P)| > 2$ и если $p \in \pi(P)$, то $F_p(G) = 1$. По лемме 19.1 [2] имеем $\boldsymbol{H}_n(p) = l_{n-1}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}\mathrm{form}G$.

Поскольку $n > 2$, то $\boldsymbol{H}_n(p)$ – насыщенная формация. Значит, $\pi(P) \subseteq \pi(\boldsymbol{H}_n(p))$. Пусть $q, r \in \pi(P) \setminus \{p\}$ и Q, R – группы порядка q и r, соответственно. Понятно, что группы Q и R принадлежат формации $\boldsymbol{H}_n(p)$. В силу леммы 18.8 [2] существуют точные неприводимые $F_p[Q]$-модуль V и $F_p[R]$-модуль W. Пусть $L = [V]Q$ и $K = [W]R$. Тогда $O_p(L) = V$ и $O_p(K) = W$. Так как при этом $L / O_p(L) \in \boldsymbol{H}_n(p)$ и $K / O_p(K) \in \boldsymbol{H}_n(p)$, то по лемме 8.2 [2] имеем $L, K \in \boldsymbol{H}$. Пусть $\boldsymbol{L} = l_n\mathrm{form}L$ и $\boldsymbol{K} = l_n\mathrm{form}K$. Тогда поскольку $n \geq 2$, то $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{N}_q$ и $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{N}_r$. Кроме того, ввиду следствия 19.10 [2] $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{K}$ – минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации, т.е. l_n-формации нильпотентного дефекта 1. Следовательно, формация $\boldsymbol{H}$ содержит подформацию $\boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K}$. В силу леммы 6 $\boldsymbol{N}_n$-дефект формации $\boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K}$ равен 2.

Поскольку $q \in \pi(P)$, то $F_q(G) = 1$ и согласно лемме 19.1 [2] имеем

$$\boldsymbol{H}_n(q) = l_{n-1}\mathrm{form}(G/F_q(G)) = l_{n-1}\mathrm{form}G.$$

Пусть D – группа порядка p. Так как $D, R \in \boldsymbol{H}_n(q)$, то $X = [Y]D$ и $Z = [T]R$ принадлежат формации $\boldsymbol{H}$, где Y и T – точные неприводимые $F_q[D]$-модуль и $F_q[R]$-модуль, соответственно. Пусть $\boldsymbol{X} = l_n\mathrm{form}X$ и $\boldsymbol{Z} = l_n\mathrm{form}Z$. Тогда $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}_q\boldsymbol{N}_p$ и $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}_q\boldsymbol{N}_r$. По лемме 6 $\boldsymbol{N}_n$-дефект формации $\boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z}$ также равен 2. Так как $\boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{H}$, то

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K} \vee_n \boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{H}.$$

Покажем, что $(\boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K}) \cap (\boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z}) \subseteq \boldsymbol{N}$. Допустим, что это неверно и A группа минимального порядка из $((\boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K}) \cap (\boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z})) \setminus \boldsymbol{N}$. Тогда A – монолитическая группа с минимальной нормальной t-подгруппой $R = A^{\boldsymbol{N}}$. Поскольку $n \geq 2$ и $A \in \boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K}$, т.е. $A \in \boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{N}_q \vee_n \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{N}_p (\boldsymbol{N}_q \vee_n \boldsymbol{N}_r) \subset \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{N}$, то R – p-группа, т.е. $t = p$. С другой стороны, так как $A \in \boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}_q\boldsymbol{N}_p \vee_n \boldsymbol{N}_q\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{N}_q (\boldsymbol{N}_p \vee_n \boldsymbol{N}_r) \subset \boldsymbol{N}_q\boldsymbol{N}$, то R – q-группа, т.е. $t = q$. Получаем противоречие. Поэтому $(\boldsymbol{L} \vee_n \boldsymbol{K}) \cap (\boldsymbol{X} \vee_n \boldsymbol{Z}) \subset \boldsymbol{N}$. Применяя теперь лемму 3 заключаем, что $|\boldsymbol{M} : \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{M}|_n = 4$.

Последнее противоречит лемме 1. Таким образом, наше предположение неверно и $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{F}$ – приводимая n-кратно насыщенная формация ($n \geq 2$). Тогда и только тогда нильпотентный дефект формации $\mathbf{F}$ равен 3, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathbf{F} = \mathbf{H}_1 \vee_n \mathbf{H}_2 \vee_n \mathbf{H}_3 \vee_n \mathbf{M}$, *где* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, а $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{H}_3$ – *различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации;*

2) $\mathbf{F} = \mathbf{H} \vee_n \mathbf{M}$, *где* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, *а* $\mathbf{H}$ – *такая неприводимая n-кратно насыщенная формация нильпотентного дефекта 3, что* $\mathbf{M} \not\subseteq \mathbf{H}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{F}$ – приводимая l_n-формация нильпотентного дефекта 3. Тогда в силу леммы 4 формация $\mathbf{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathbf{F} = \mathbf{H} \vee_n \mathbf{X}$, где $\mathbf{H}$ – неприводимая l_n-формация и $|\mathbf{H} : \mathbf{N} \cap \mathbf{H}|_n = t$, $1 \leq t \leq 2$, а $\mathbf{X}$ – такая l_n-формация, что $|\mathbf{X} : \mathbf{N} \cap \mathbf{X}|_n = 2$ и $\mathbf{H} \cap \mathbf{X}$ – максимальная l_n-подформация формации $\mathbf{H}$;

(2) $\mathbf{F} = \mathbf{H} \vee_n \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, а $\mathbf{H}$ – такая неприводимая l_n-формация, что $|\mathbf{H} : \mathbf{N} \cap \mathbf{H}|_n = 3$ и $\mathbf{M} \not\subseteq \mathbf{H}$.

Пусть $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию (1). Поскольку по лемме 5 любая l_n-формация с нильпотентным дефектом 2 приводима ($n \geq 2$), то $t = 1$. Значит, $\mathbf{H}$ – минимальная n-кратно насыщенная ненильпотентная формация.

Кроме того, согласно лемме 6 $\mathbf{X} = \mathbf{H}_1 \vee_n \mathbf{H}_2 \vee_n \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, а $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ – различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации. Так как по условию $\mathbf{H} \cap \mathbf{X}$ – максимальная l_n-подформация формации $\mathbf{H}$, то $\mathbf{H} \not\subseteq \mathbf{X}$. Значит, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{H}$ – различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации. Таким образом, $\mathbf{F} = \mathbf{H} \vee_n \mathbf{X} = \mathbf{H} \vee_n \mathbf{H}_1 \vee_n \mathbf{H}_2 \vee_n \mathbf{M}$, где формации $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{M}$ удовлетворяют условию 1) теоремы.

Если для формации $\mathbf{F}$ выполняется условие (2), то, очевидно, формация $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Достаточность. Пусть формация $\mathbf{F}$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда применяя лемму 3 легко убедиться, что $|\mathbf{F} : \mathbf{N} \cap \mathbf{F}|_n = 3$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{F}$ – неприводимая n-кратно насыщенная формация ($n \geq 2$). Тогда и только тогда нильпотентный дефект формации $\mathbf{F}$ равен 3, когда* $\mathbf{F} = l_n\mathrm{form}G$, *где G – такая монолитическая группа, что* $G = [P]H$, *где* $P = C_G(P)$ – *минимальная нормальная p-подгруппа группы G,* $H = [Q]R$, $Q = C_H(Q)$ – *минимальная нормальная q-подгруппа в H* ($q \neq p$), $|R| = p$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $n \geq 2$ и $\mathbf{F}$ – неприводимая l_n-формация нильпотентного дефекта 3. В силу леммы 7 формация $\mathbf{F}$ разрешима. Обозначим через $\mathbf{X}$ максимальную l_n-подформацию формации $\mathbf{F}$. Тогда $|\mathbf{X} : \mathbf{N} \cap \mathbf{X}|_n = 2$. По лемме 6 $\mathbf{X} = \mathbf{H}_1 \vee_n \mathbf{H}_2 \vee_n \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, а $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ – различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации. Ввиду следствия 19.10 [2] $\mathbf{H}_i = l_n\mathrm{form}A_i$, где A_i – некоторые группы Шмидта. Поэтому $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{N}^2$. Поскольку $\mathbf{X}$ – единственная максимальная l_n-подформация в $\mathbf{F}$, то $\mathbf{F}$ – минимальная n-кратно насыщенная не $\mathbf{X}$-формация. Поэтому по следствию 18.6 [2] $\mathbf{F} = l_n\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathbf{X}}$, что $F_n(p)$ – минимальная $(n\text{-}1)$-кратно насыщенная не $(\mathbf{N}_p\mathbf{X}_n(p))$-формация для любого $p \in \pi(P)$. Так как формация $\mathbf{F}$ разрешима, то P – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Поскольку $n \geq 2$, то $\mathbf{N}_p\mathbf{X}_n(p)$ – насыщенная формация. Значит, $P \not\subset \Phi(G)$. Поэтому $P = C_G(P)$ и $G = [P]M$ для некоторой максимальной в G подгруппы M.

Предположим, что $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{N}^2$. Тогда по лемме 19.1 [2]

$$F_n(p) = l_{n\text{-}1}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n\text{-}1}\mathrm{form}M \subset \mathbf{N}.$$

Пусть H группа минимального порядка из $F_n(p)\backslash N_pX_n(p)$. Тогда H – монолитическая группа с минимальной нормальной q-подгруппой $Q \not\subseteq \Phi(H)$, $H/Q \in N_pX_n(p)$. Так как H – нильпотентная группа, то $H = Q$ – группа простого порядка q ($q \neq p$). По лемме 18.8 [2] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль V. Пусть $L=[V]H$. Тогда $O_p(L) = V$. Ввиду леммы 8.2 [2] группа L принадлежит формации F. Но $L \notin X$. Поэтому $F = l_n\text{form}L$. Но тогда по следствию 19.10 [2] F – минимальная n-кратно насыщенная ненильпотентная формация, т.е. N_n-дефект формации F равен 1. Получаем противоречие.

Таким образом, $F \not\subseteq N^2$. Поэтому F – минимальная n-кратно насыщенная не N^2-формация. В силу теоремы 19.9 [2] $F = l_n\text{form}G$, где $G = [P_1]([P_2]P_3)$, P_1 – самоцентрализуемая минимальная нормальная r-подгруппа группы G, $P_2 = C_G(P_2)$ – минимальная нормальная s-подгруппа группы $[P_2]P_3$, $|P_3| = t$, где r, s, t – некоторые простые числа.

Предположим теперь, что $r \neq t$. Тогда поскольку $n \geq 2$, то формация $F_n(r) = l_{n-1}\text{form}(G/F_r(G)) = l_{n-1}\text{form}([P_2]P_3)$ является насыщенной. Поэтому числа s и t принадлежат $\pi(F_n(p))$. Пусть S и T – такие группы, что $|S|= s$ и $|T| = t$. Обозначим через V и W – точные неприводимые $F_r[S]$-модуль и $F_r[T]$-модуль, соответственно. Далее, пусть $L = [V]S$ и $K = [W]T$. В силу леммы 8.2 [2] группы L и K принадлежат формации F. Кроме того, формации F принадлежит группа $[P_2]P_3$, как гомоморфный образ группы G. По следствию 19.10 [2] каждая из данных трех групп порождает n-кратно насыщенную формацию нильпотентного дефекта 1. Пусть $H_1 = l_n\text{form}L$, $H_2 = l_n\text{form}K$, $H_3 = l_n\text{form}([P_2]P_3)$. Тогда $H_1 \vee_n H_2 \vee_n H_3 \subset F$. В силу теоремы 1 N_n-дефект формации $H_1 \vee_n H_2 \vee_n H_3$ равен 3. Но F – неприводимая l_n-формация. Следовательно, $H_1 \vee_n H_2 \vee_n H_3 \subseteq X$. Последнее невозможно ввиду леммы 1. Значит, $r = t$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Пусть формация F удовлетворяет условиям теоремы. Согласно лемме 19.1 [2]

$F_n(p) = l_{n-1}\text{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}\text{form}([Q]R)$,

$F_n(q) = l_{n-1}\text{form}(G/F_q(G)) = l_{n-1}\text{form}R = N_p$.

Пусть M – собственная l_n-подформация из F. Тогда по лемме 19.2 [2] $M_n \leq F_n$. Допустим, что $M_n(p) = F_n(p)$. Тогда поскольку $G \in N_pF_n(p)$, то $G \in N_pM_n(p) \subset M$. Следовательно, $F = l_n\text{form}G \subseteq M$. Противоречие. Значит, $F_n(p) \neq M_n(p)$. По следствию 19.10 [2] $F_n(p)$ – минимальная (n-1)-кратно насыщенная ненильпотентная формация. Следовательно, $M_n(p) \subseteq N$. По теореме 19.1 [2] имеем

$$M_n(p) = l_{n-1}\text{form}(A \mid A \in M_n(p),\ O_p(A)=1).$$

Но $M_n(p)$ нильпотентная формация. Значит, $M_n(p) \subset N_q$. Таким образом, для любой собственной l_n-формации M из F имеет место $M_n(p) \subset N_q$ и $M_n(q) \subset N_p$.

Далее, поскольку $n > 2$, то $q \in \pi(F_n(p))$. Значит, $[W]D \in F$, где W – точный неприводимый $F_p[D]$-модуль, $|D| = q$. Кроме того, группа $[Q]R$ принадлежит формации F, как гомоморфный образ группы G. Значит, формация F содержит l_n-подформацию $H = l_n\text{form}([W]D, [Q]R)$. В силу следствия 19.10 [2] группы $[W]D$ и $[Q]R$ порождают различные l_n-формации нильпотентного дефекта 1. Следовательно, по лемме 6 нильпотентный дефект l_n-формации H равен 2. По лемме 19.1 [2] $H_n(p) = l_{n-1}\text{form}D = N_q$, $H_n(q) = l_{n-1}\text{form}R = N_p = F_n(q)$. Но тогда для любой собственной l_n-подформации M из F имеет место включение $M_n \leq H_n$. Следовательно, в силу леммы 19.2 [2] $M \subset H$. Таким образом, H – единственная максимальная l_n-подформация формации F. Но тогда нильпотентный дефект F равен 3. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М., 1978. – 267 с.
2. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. – М., 1989. – 253 с.
3. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. – Мн., 1997. – 240 с.
4. ***Сафонов В.Г.*** О кратно локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом // Вопросы алгебры. Вып. 9. – Гомель, 1996. – С. 161–175.
5. ***Сафонов В.Г.*** О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук, 1996, № 3. – С. 8–12.
6. ***Сафонов В.Г.*** О локальных формациях нильпотентного дефекта 3 // Известия ГГУ (Вопросы алгебры), 1999, № 1(15). – С. 78–84.
7. ***Сафонов В.Г.*** О неразрешимых насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 // Известия ГГУ, 2004, № 4 (25). – С. 142–147.

SUMMARY

*Let **F** is some n-multiply saturated formation, **N** is the formation of all nilpotent groups. Then $\mathbf{F}/_n\, \mathbf{F}\cap\mathbf{N}$ denote the lattice of all n-multiply saturated formations **X** such that $\mathbf{F}\cap\mathbf{N}\subseteq\mathbf{X}\subseteq\mathbf{F}$. A length of the lattice $\mathbf{F}/_n\, \mathbf{F}\cap\mathbf{N}$ is called the nilpotent defect of the n-multiply saturated formation **F**. In this paper we obtained the exact description of n-multiply saturated formation with nilpotent defect 3.*

Поступила в редакцию 24.02.2005