

Методика работы с логарифмическими уравнениями в контексте укрупнения дидактических единиц

В.В. Устименко, О.А. Попп

Учреждение образования «Витебский государственный университет
имени П.М. Машиерова»

В методике преподавания математики в настоящее время учеными реализуется идея рассмотрения взаимосвязанных уравнений. В связи с этим возникает проблема обучения учащихся методам решения логарифмических уравнений, которая может быть решена на основе обращения к теории укрупнения дидактических единиц. В качестве дидактической единицы, подвергаемой укрупнению, выступает действие как структурный компонент методов решения уравнений.

Цель статьи – определить приемы укрупнения и методы решения логарифмических уравнений в школьном курсе алгебры.

Материал и методы. Материалом исследования послужили работы авторов со школьниками в УНКЦ на базе ГУО «СПШ № 45 г. Витебска». При этом использовались эмпирические и логические методы.

Результаты и их обсуждение. Процесс решения любого уравнения не должен заканчиваться только после его выполнения. Необходимо дальше работать, «играть» с уравнением, образуя на его основе уравнения-анalogии, уравнения-обобщения и т.д., что вносит в учебный процесс множество положительных моментов с методической точки зрения.

Более основательно усвоить действия, адекватные различным методам решения логарифмических уравнений, а значит, и закрепить навыки работы с этими методами, школьникам позволят знания самих методов решения (использование определения логарифма, потенцирование, логарифмирование, приведение к одному основанию, введение новой переменной, функциональный метод, метод почленного деления, метод группировки).

Применение блоков укрупненных логарифмических уравнений в учебном процессе параллельно с обучением школьников методам решений помогает учащимся эффективно усваивать и иной материал алгебры.

Заключение. Организация усвоения учащимися отдельных методов решения логарифмических уравнений требует включения в учебный процесс блоков укрупненных уравнений. Использование подобных блоков предполагает реализацию следующих этапов: работа учащихся с готовыми блоками, составление последних школьниками под руководством учителя и самостоятельно.

Ключевые слова: укрупнение действия, логарифмические уравнения, методы решения, блоки взаимосвязанных уравнений.

Methods of Work with Logarithmic Equations in the Context of Enlargement of Didactic Units

V.V. Ustimenko, O.A. Popp

Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In methods of teaching Maths at present scholars implement the idea of considering mutually linked equations. In this connection the issue of teaching students methods of solving logarithmic equations arises which can be solved on the basis of addressing the theory of didactic units enlargement. As a didactic unit, which undergoes enlargement, we have action as a structural component of methods of solution equations.

The aim of the research is to identify ways of enlargement and methods of solution of logarithmic equations in the school course of Algebra.

Material and methods. The material of the research was works of the authors with schoolchildren at Academic and Research Consulting Center at Secondary School No 45 of the City of Vitebsk.

Findings and their discussion. The process of solving any equation should not finish only after satisfying the requirements. It is necessary to work further, «play» with the equation and make on its basis equations-analogies, equations-generalizations etc., which brings many positive moments into the academic process from the methodological point of view.

Knowledge of solution methods (application of logarithm definition, potentiating, logarithming, drawing to one basis, introduction of new variable, functioning method, method of member by member division, grouping method) makes it possible for schoolchildren to substantially master the actions appropriate to different methods of solving logarithmic equations and, thus, improve skills of work with these methods. Application of blocks of enlarged logarithmic equations in the academic process alongside with teaching solution methods makes it possible for students to efficiently master other Algebra material.

Conclusion. Setting up students' mastering some methods of solution of logarithmic equations requires inclusion into the academic process of blocks of enlarged equations. Application of such blocks presupposes implementation of the following stages: students work with ready blocks, building up the latter by students with the guidance of the teacher and independently.

Key words: enlargement, logarithmic equations, solution methods, blocks of mutually linked equations.

В настоящее время идея внедрения в процесс обучения алгебре блоков взаимосвязанных уравнений все больше привлекает к себе внимание методистов и учителей математики. Однако в школьных учебниках по данному предмету эта идея своего отражения пока не находит. Возможные связи между содержащимися в них уравнениями авторами, как правило, не учитываются. Уравнения, предлагаемые в учебниках для работы школьников в классе и дома, оказываются мало связанными, особенно по линии решений. В связи с этим возникает проблема обучения учащихся методам решения логарифмических уравнений, которая может быть решена на основе обращения к теории укрупнения дидактических единиц. В нашей работе в качестве дидактической единицы, подвергаемой укрупнению, выступает действие как структурный компонент методов решения уравнений. Средством укрупнения действий, соответствующих методам решения логарифмических уравнений, являются блоки самих уравнений, взаимосвязанных между собой по линии укрупнения своих решений.

Предположим, что у нас имеется некоторое уравнение-1, для решения которого каким-либо конкретным методом необходимо выполнить определенную последовательность действий. Эти действия взаимосвязаны между собой. Каждое последующее из них опирается на результат выполнения предыдущего, а вместе они направлены на достижение одной цели: получения ответа в уравнении-1. Эту совокупность действий определим как одно целое – укрупненное действие-1. Если далее мы расширим уравнение-1 до уравнения-2, то действия, способствующие решению второго уравнения некоторым методом, будут взаимосвязаны между собой так же, как и действия первого уравнения. Поэтому их совокупность определим как новое целое – укрупненное действие-2. Решение уравнения-2 включает в себя решение уравнения-1. Часть действий из тех, что способствуют решению уравнения-2, тождественна действиям в решении уравнения-1. Значит, к предыдущим действиям мы просто добавили несколько новых и получили действие-2. Таким образом, действие-2 есть укрупненное действие-1.

Образуются подобные блоки в соответствии с комплексом методических приемов: замена требования по решению уравнения каким-либо новым требованием; замена условия уравнения каким-либо новым условием с использованием

свойств логарифмов; обобщение уравнений; конкретизация уравнений.

Цель статьи – определить приемы укрупнения и методы решения логарифмических уравнений в школьном курсе алгебры.

Материал и методы. Материалом для проведения исследования явились кандидатские работы, научные статьи, сборники научных трудов, школьные учебники по алгебре для 11 класса, учебные пособия по математике для старшеклассников, теоретической основой – технология укрупнения дидактических единиц, практической основой – опыт работы авторов со школьниками в УНКЦ на базе ГУО «СШ № 45 г. Витебска» на протяжении двух последних лет. В исследовании принимали участие учащиеся 11 «А» и 11 «Б» классов (учитель математики М.Р. Курякова). В целом было привлечено 78 школьников. При этом использовались эмпирические и логические методы.

Результаты и их обсуждение. Методисты-математики, а также многие опытные учителя утверждают, что процесс решения любого уравнения не должен заканчиваться только после его выполнения. Не следует останавливаться на этом, сводя практически все функции предложенного уравнения к нулю. Необходимо дальше работать, «играть» с уравнением, образуя на его основе уравнения-анalogии, уравнения-обобщения и т.д., что вносит в учебный процесс множество положительных моментов с методической точки зрения.

Раскроем методику такой «игры» с отдельно взятым уравнением в контексте укрупнения действий, соответствующих методам его решения.

Предположим, что учащимся предложено следующее уравнение:

$$lg^2x + 3lgx - 4 = 0. \quad (1)$$

Теперь для уравнения (1) составим укрупненный блок уравнений, представленный в табл. 1, используя прием замены условия уравнения каким-либо новым условием с использованием свойств логарифмов.

Способствовать укрупнению уравнения также будут изменения условия уравнения, при некотором изменении его требований.

Для данного квадратного уравнения (1) составим укрупненный блок уравнений, применяя прием укрупнения: замена требования по решению уравнения каким-либо новым требованием.

2.1. Найти корни уравнения $lg^2x + 3lgx - 4 = 0$.

2.2. Найти сумму корней уравнения $lg^2x + 3lgx - 4 = 0$.

2.3. Найти среднее арифметическое корней уравнения $lg^2x + 3lgx - 4 = 0$.

2.4. Найти значение выражения $\frac{2m}{k}$, где m – среднее арифметическое корней уравнения, а k – сумма корней уравнения $lg^2x + 3lgx - 4 = 0$.

Уравнения, составляющие этот блок, имеют одинаковые условия, но разные требования. При их решении можно выделить такие действия, адекватные их решению, которые представлены в табл. 2.

После решения уравнения (1) можно решить обобщенное уравнение

$$k \log_a^2 x + m \log_a x + n = 0. \quad (2)$$

Данное уравнение является квадратным, для его решения используем метод введения новой переменной.

Сделаем замену $\log_a x = t$:

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (3)$$

Получили квадратное уравнение, находим его корни уравнения.

$D = b^2 - 4ac$, откуда

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Полученные решения уравнения (3) подставим в выражение

$$\log_a x = t.$$

$$\log_a x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\log_a x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Таблица 1

Укрупненный блок уравнений

№	Уравнения	Тождественные преобразования
1.1	$lg^2x + lgx^3 - 4 = 0$	$lgx^3 = 3lgx$, сводится к уравнению (1)
1.2	$lg^2x + lgx^3 - 10^{lg^4} = 0$	$10^{lg^4} = 4$, сводится к уравнению 1.1
1.3	$lg^2x + lgx^3 - 10^{lg^4} = lg1$	$lg1 = 0$, сводится к уравнению 1.2
1.4	$lg^2x + lgx^7 - lgx^4 - 10^{lg^4} = lg1$	$lgx^7 - lgx^4 = lgx^3$, сводится к уравнению 1.3
1.5	$\left(\frac{\log_5 x}{\log_5 10}\right)^2 + lgx^7 - lgx^4 - 10^{lg^4} = lg1$	$\left(\frac{\log_5 x}{\log_5 10}\right)^2 = lg^2x$, сводится к уравнению 1.4
1.6	$\left(\frac{\log_5 x}{\log_5 10}\right)^2 + lgx^2 + lgx^5 - lgx^4 - 10^{lg^4} = lg1$	$lgx^2 + lgx^5 = lgx^7$, сводится к уравнению 1.5

Таблица 2

Действия, адекватные решению уравнения

Уравнения	2.1	2.2	2.3	2.4
Действия, адекватные решению уравнения	Решение квадратного уравнения относительно lgx			
	Нахождение суммы корней уравнения			
	Нахождение среднего арифметического корней уравнения			
				Нахождение значения выражения

Получим решения исходного уравнения:

$$x_1 = a^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_2 = a^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Ответ: $a^{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, a^{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$

Таким образом, анализ логарифмического уравнения (1), осуществленный в контексте укрупнения его решения, позволяет составить достаточно большой блок различных уравнений.

Подобное развитие логарифмического уравнения оказывает положительное воздействие на многие личностные качества обучаемых. Так, выполнение учениками упражнений на восстановление того или иного блока уравнений способствует развитию у учащихся вариативности и логики мышления, интуиции, воображения. Любое упражнение требует составить одно или более новых уравнений, также помогает формировать эти качества параллельно с развитием речи и памяти учащихся, раскрытием их творческого потенциала. Как утверждают психологи, лучшее запоминание, усвоение чего-либо (учебного материала, решения уравнения и т.д.) дает незавершенное действие, что объясняется возникновением так называемой остаточной напряженности. В случае обращения учащихся к решению укрупненного уравнения-2 (решение которого состоит из решения уравнения-1 и n новых действий) подобная напряженность всегда существует за счет наличия в решении n новых действий. Поэтому выполненное решение такого уравнения-2 запоминается школьниками лучше, чем в том случае, если бы не было предварительного решения уравнения-1. Лучше будут усвоены ими и знания, необходимые для осуществления этого решения, и действия, соответствующие используемому методу решения.

Более основательно усвоить действия, адекватные различным методам решения логарифмических уравнений, а значит, и упрочнить навыки работы с этими методами, школьникам позволят знания самих методов решения.

Исследование показало, что не все методы решения логарифмических уравнений представлены в школьном учебнике [1], причем отсутствуют их конкретный список и описание. Лишь при рассмотрении разобранных примеров можно догадаться о наличии таких методов решения логарифмических уравнений, как использование определения логарифма, потенцирование, логарифмирование, приведение к одному основанию, введение новой переменной.

Вместе с тем анализ учебно-методической литературы выявил, что в школьном курсе математики можно выделить еще такие методы, как функциональный метод, метод почленного деления, метод группировки [2].

Рассмотрим подробнее каждый из указанных методов.

Использование определения логарифма. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$.

Потенцирование. Суть метода заключается в следующем: с помощью формул уравнение привести к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Это уравнение (при $a > 0, a \neq 1$) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Метод введения новой переменной. Ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно, что удобно обозначить. В более сложных случаях подстановку можно заметить лишь после нескольких преобразований.

Пример 1: $lg^2 x - 3lgx + 2 = 0$.

ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0; +\infty)$. Обозначив $lgx = t$ (тогда $lg^2 x = (lgx)^2 = t^2$), получим квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно, $lgx = 1$ или $lgx = 2$, откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$. Оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: 10, 100.

Логарифмирование. Логарифмирование – действие, заключающееся в нахождении логарифма числа или выражения.

Логарифмирование является одним из двух действий, обратных возведению в степень. Если $a^c = b$, то $a = \sqrt[c]{b}, c = \log_a b$.

Методом логарифмирования могут быть решены некоторые логарифмические уравнения.

Решение уравнения логарифмированием схематически можно описать приблизительно так: $(f(x))^{\log_a g(x)} = b$.

ОДЗ: $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Логарифмируем обе части уравнения по основанию a :

$$\log_a (f(x))^{\log_a g(x)} = \log_a b$$

(просто приписываем к обеим частям уравнения логарифм по основанию a . a – основание логарифма, стоящего в показателе степени).

Показатель степени выносим за знак логарифма:

$$\log_a g(x) \cdot \log_a(f(x)) = \log_a b.$$

Пример 2. $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}.$

ОДЗ: $x > 0$.

Логарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$$\log_3 x^{\log_3 x - 4} = \log_3 \frac{1}{27},$$

$$(\log_3 x - 4) \cdot \log_3 x = -3.$$

Полученное уравнение решаем с помощью замены переменной.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$(t - 4) \cdot t = -3, t^2 - 4t + 3 = 0, t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Обратная замена:

$$\log_3 x = 1, \log_3 x = 3.$$

Эти простейшие логарифмические уравнения решаем по определению логарифма:

$$x_1 = 3^1; x_2 = 3^3.$$

$$x_1 = 3; x_2 = 27.$$

Ответ: 1, 27.

Метод приведения к одному основанию.

Обычно условие примера подсказывает, к какому основанию следует перейти. Используются формулы:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_a b = \log_{a^\alpha} b^\alpha, \alpha \neq 0.$$

Как правило, метод приведения к одному основанию «работает» с методом подстановки.

Функциональный метод. Теорема. Уравнение $f(x) = g(x)$, (1) где f – возрастающая и g – убывающая функции, определенные на одном и том же множестве, имеет не более одного корня, т.е. либо вообще не имеет корней, либо имеет единственный корень.

Пример 3. Решить графически уравнение $\log_2 x = 3 - x$.

Решение: ОДЗ: $x > 0$.

В одной и той же системе координат строим графики функций $f(x) = \log_2 x$ и $\varphi(x) = 3 - x$ (рис.).

Абсцисса точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ равна примерно двум. Нетрудно проверить, что это точный корень данного уравнения.

$$\text{Проверка: } \log_2 2 = 3 - 2.$$

$$1 = 1.$$

Ответ: 1.

Метод почленного деления. Суть метода: метод применяется для решения однородных уравнений, т.е. уравнение вида $ay^{2\alpha} + by^\alpha z^\alpha + cz^\alpha = 0$, где a, b, c, α – заданные числа, отличные от нуля; $y = y(x)$, $z = z(x)$ – некоторые функции от x .

Делим обе части уравнения $z^{2\alpha} \neq 0$. Получаем

$$a \left(\frac{y}{z}\right)^{2\alpha} + b \left(\frac{y}{z}\right)^\alpha + c = 0.$$

Обозначив $\left(\frac{y}{z}\right)^\alpha = t$, получаем квадратное уравнение относительно t .

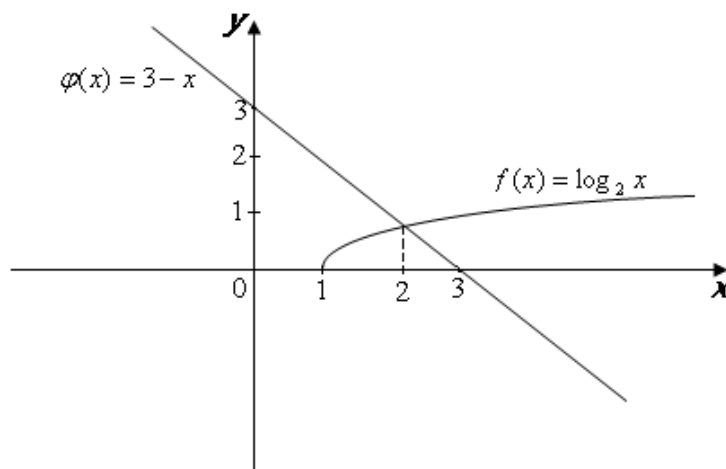


Рис. График к примеру 3.

Пример 4. Решить логарифмическое уравнение

$$\lg^2 x - \lg x \cdot \lg(x-1) - 2 \cdot \lg^2(x-1) = 0.$$

Решение:

ОДЗ: $x > 1$.

Разделим обе части уравнения на

$$\lg^2 x (\lg^2(x-1)):$$

$$\left(\frac{\lg^2 x}{\lg(x-1)} \right)^2 - \frac{\lg x}{\lg(x-1)} - 2 = 0.$$

Введем новую переменную:

$$\frac{\lg x}{\lg(x-1)} = t.$$

Получим:

$$t^2 - t - 2 = 0, \\ t_1 = -1, t_2 = 2$$

и т.д.

Метод группировки. Суть метода: путем группировки слагаемых, применения формул сокращенного умножения привести (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких сомножителей, а справа – ноль. Затем приравняем к нулю каждый из сомножителей.

Пример 5. Решить логарифмическое уравнение: $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 x^3 + \log_2 x^2 - 6$.

Решение:

ОДЗ: $x > 0$.

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения: $\log_2 x \cdot \log_3 x - \log_3 x^3 - \log_2 x^2 + 6 = 0$.

Воспользуемся формулой $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a |x|$ и сгруппируем первое и второе слагаемое, третье и четвертое: $(\log_2 x \cdot \log_3 x - 3 \log_3 x) - (2 \log_2 x + 6) = 0$.

Вынесем общий множитель в скобках: $\log_3 x (\log_2 x - 3) - 2(\log_2 x - 3) = 0$.

Вынесем общий множитель $\log_2 x - 3$ за скобку: $(\log_2 x - 3)(\log_3 x - 2) = 0$.

Решим два уравнения:

$$\begin{aligned} \log_2 x - 3 &= 0, & \log_3 x - 2 &= 0, \\ \log_2 x &= 3, & \log_3 x &= 2, \\ x &= 8, & x &= 9. \end{aligned}$$

Полученные ответы удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 8, 9.

Кроме того, учитель должен показать примеры неравносильных преобразований, приводящих как к потере корней исходного уравнения, так и к приобретению посторонних корней.

Следует обратить внимание учащихся на преобразования, связанные со следующими логарифмическими формулами:

$$f(x) = a^{\log_a f(x)}, \quad (4)$$

$$\log_a (f(x))^2 = 2 \log_a f(x), \quad (5)$$

$$\log_a (f(x))^2 = 2 \log_a f(-x), \quad (6)$$

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x), \quad (7)$$

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x)), \quad (8)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x), \quad (9)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a (-f(x)) - \log_a (-g(x)). \quad (10)$$

Если при решении уравнения $\varphi(x) = h(x)$ формально применить к левой или правой части этого уравнения любую из рассматриваемых формул так, что левая часть этой формулы будет заменена правой частью, то возможна потеря корней исходного уравнения, поэтому такие преобразования недопустимы.

Если к левой или правой части уравнения $\varphi(x) = h(x)$ формально применить любую из рассматриваемых формул так, что правая часть формулы будет заменена левой, то корни уравнения $\varphi(x) = h(x)$ теряться не будут; любой корень уравнения $\varphi(x) = h(x)$ будет корнем последующего уравнения, но, вообще говоря, не всякий корень последующего уравнения будет являться корнем исходного уравнения, и поэтому, если такие преобразования применялись, то в конце решения обязательно необходима проверка, т.е. следует каждый из найденных корней последнего простейшего уравнения подставить в исходное уравнение и убедиться, какие из них обращают исходное уравнение в верное числовое равенство. Те из них, при каждом из которых исходное уравнение превращается в неверное числовое равенство, нужно отбросить [3].

Если в процессе решения уравнения возникает необходимость провести преобразования с помощью некоторой логарифмической формулы, то такое уравнение можно решать по следующей схеме:

1. Найти ОДЗ уравнения.
2. Разбить на два множества: M_1 и M_2 (M_1 – вся та часть ОДЗ, где одновременно имеют смысл обе части используемой формулы, M_2 – та часть ОДЗ, которая остается после выделения множества M_1).
3. Решить уравнение на множестве M_1 (учитывая, что преобразования уравнения с помощью этой формулы есть равносильное преобразование на множестве M_1).
4. Решить уравнение на множестве M_2 .
5. Объединить множества корней, найденные на M_1 и M_2 .

Таким образом, знания методов решения логарифмических уравнений будут способствовать повышению эффективности усвоения школьниками действий, адекватных этим методам, а также эффективности их обучения решению самих уравнений.

Заключение. Анализ связи компонентов различных блоков, образуемых нами в ходе исследования, позволил сделать вывод о том, что решение практически любого логарифмического уравнения можно подвергнуть укрупнению, если подходить к нему с позиции его незаконченности, т.е. подразумевая существование его логического продолжения. Одновременно с укрупнением решения уравнения подобные изменения можно наблюдать в других его компонентах. Очевидно, что процесс укрупнения непосредственно зависит от учебных целей и от объема и качества приобретаемых учащимися знаний, умений и навыков. Но в случае их малого объема значительно затрудняется достижение разнообразия в блочных уравнениях.

Использование подобных блоков уравнений предполагает реализацию следующих этапов: работа учащихся с готовыми блоками, составление последних школьниками под руководством учителя и самостоятельно. На каждом из данных этапов возможно применение различных видов упражнений, позволяющих организовать усвоение учащимися отдельных методов решения логарифмических уравнений.

Следует также отметить, что отбор материала к таким урокам требует значительных затрат времени, но результат применения вышеописанных методов на практике стоит гораздо большего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 11-летним сроком обучения / Е.П. Кузнецова [и др.]; под ред. Л.Б. Шнепермана. – 2-е изд., перераб. – Минск: Нар. асвета, 2008. – 271 с.
2. Методы решения задач по алгебре: от простых до сложных / С.В. Кравцев [и др.]; под общ. ред. С.В. Кравцева. – М.: Экзамен, 2001. – 544 с.
3. Потапов, М.К. Функции. Уравнения. Неравенства / М.К. Потапов, В.В. Александров, В.И. Пасиченко, Т.М. Вукколова. – М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1995. – 164 с.

REFERENCES

1. Kuznetsova E.P. *Algebra: ucheb. posobiye dlia 11-go kl. obshcheobrazov. uchrezhdenii s rus. yaz. obucheniya s 11-letnim srokom obucheniya* [Algebra: Manual for 11th Year Russian General Secondary Schools with 11 Year Training], Minsk, Nar. asveta, 2008, 271 p.
2. Kravtsev S.V. *Metodi resheniya zadach po algebre: ot prostikh do slozhnykh* [Methods of Solving Algebraic Problems From Simple to Complex], M., Ekzamen, 2001, 544.
3. Potapov M.K., Aleksandrov V.V., Pasichenko V.I., Vukolova T.M. *Funktsii. Uravneniya. Neravenstva* [Functions. Equations. Non-Equations], M., Izd. Otdel UNTs DO MGU, 1995, 164 p.

Поступила в редакцию 20.06.2016

Адрес для корреспонденции: e-mail: ol_maz@mail.ru – Попп О.А.