Итак мы видим, что даже при T_1, равном 1°С, зависимости спонтанной поляризации и пирокоэффициента от температуры при модуляции и без практически идентичны и в отличии от рассмотренной выше ситуации с сегнетоэлектриком 2-го рода, здесь никакого «смещения» критической точки не наблюдается.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Эпштейн Э.М.*** Влияние модуляции температуры на спонтанную поляризацию сегнетоэлектрика // ФТТ, Т. 28, 1986, В. 4, С.1268-1270.
2. ***Лайнс М., Гласс А.*** Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М., 1981. – 736 с.
3. ***Смоленский Г.А., Крайник Н.Н.*** Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. М., 1968. – 184 с.

S U M M A R Y

Calculations of polarization and pyrocoefficient of ferroelectric materials are spent at modulation of temperature.

Поступила в редакцию 19.10.2001

УДК 539.3: 534.1

Г. И. Михасев, О. М. Згирская

Локальная потеря устойчивости тонкой слоистой цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии

В данной работе с использованием асимптотического комплексного ВКБ-метода исследуется локальная бифуркация безмоментного напряженного состояния тонкой слоистой цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого сжатия.

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k-го слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\varphi$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно. Оболочка занимает область $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $0 \le s \le l$, где $\varphi_1 \ge 0$, $\varphi_2 \le 2\pi$, т.е. в общем случае оболочка может быть незамкнутой в окружном направлении (случай цилиндрической панели).

Пусть оболочка подвержена действию неравномерно распределенной по контуру осевой сжимающей силы $N^0(\varphi)$. Под действием этой силы в оболочке в докритическом безмоментном состоянии возникают мембранные осевые усилия

$$T_1^0 = -\frac{N^0(\varphi)}{2\pi R} \qquad (1)$$

В дальнейшем будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Григолюком и Куликовым [1]. В частности закон распределения тангенциальных перемещений по толщине пакета слоев считается нелинейным (обобщенная кинематическая гипотеза Тимошенко). В рамках принятых допущений Григолюком и Куликовым была выведена система двенадцати нелинейных уравнений [1], описывающих равновесие слоистой анизотропной оболочки. Согласно статическому критерию Эйлера потери устойчивости линеаризация этих уравнений в окрестности безмоментного (докритического) состояния оболочки позволяет получить линейные уравнения устойчивости. Дальнейшие упрощения связаны с предположениями относительно характера потери устойчивости и физических свойств слоев.

Будем считать, что физические характеристики слоев различаются незначительно, а потеря устойчивости сопровождается образованием большого количества мелких вмятин и выпучин. Тогда для описания бифуркации безмоментного напряженного состояния, характеризующегося усилием (1), может быть использована система полубезмоментных уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2(1-\varepsilon^3\tau\Delta)\Delta^2\chi + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \lambda t(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\chi - \varepsilon^2\kappa\Delta\chi) = 0, \\ &\varepsilon^2\Delta^2 F - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\chi - \varepsilon^2\kappa\Delta\chi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

записанная в безразмерном виде. Здесь

$$\begin{gathered} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \varepsilon^4 = \frac{h^2\eta}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad T_1^0 = -\lambda E h \varepsilon^2 t(\varphi), \quad w = \left(1 - \frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi \\ h = \sum_{k=1}^{N} h_k, \quad \nu = \sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}, \quad E = \frac{1-\nu^2}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \end{gathered} \tag{3}$$

где ε – малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки, h – толщина оболочки, E и ν – усредненные модуль Юнга и коэффициент Пуассона, τ, κ, η, b – параметры, учитывающие поперечные сдвиги [2], F и χ – функции напряжений и перемещений (связь их с размерными величинами см. в [2]), $\lambda > 0$ – искомый параметр нагружения, $t(\varphi)$ – бесконечно дифференцируемая функция с производными порядка O (1) при $\varepsilon \to 0$.

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания [1]

$$F = \Delta F = \chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = 0 \text{ при } s = 0, l. \tag{4}$$

Задача заключается в определении наименьшего $\lambda > 0$ краевой задачи (2), (4).

Учитывая зависимость осевых усилий от координаты φ, считаем, что потеря устойчивости происходит в окрестности некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$, называемой «слабой образующей» [3]. Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\xi \tag{5}$$

Следуя [3], решение задачи (2), (4) будем искать в виде

$$\begin{gathered} \chi = \chi_m(\varphi)\sin(p_m s/\varepsilon), \quad F = \Phi_m(\varphi)\sin(p_m s/\varepsilon), \quad p_m = m\pi\varepsilon/l, \; m = 1, 2, \ldots, \\ \chi_m = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2}\chi_{mj}(\xi)\exp\{i(\varepsilon^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2)\}, \\ \Phi_m = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{mj}(\xi)\exp\{i(\varepsilon^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2)\}, \\ \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots, \quad \operatorname{Im} a > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Последнее неравенство гарантирует убывание амплитуды волн вдали от линии $\varphi = \varphi_0$. Разложим функцию $t(\varphi)$ в ряд в окрестности этой образующей:

$$t(\varphi) = t(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2}t'(\varphi_0)\xi + \frac{1}{2}\varepsilon t''(\varphi_0)\xi^2 + \ldots. \tag{7}$$

Подстановка (6), (7) в (2), (4) приводит к последовательности алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{j} A_k X_{j-k} = 0, \; j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

относительно вектор-функции $X_j = (\chi_{mj}, f_{mj})^T$, где элементы матрицы A_0 задаются соотношениями

$$\begin{aligned} A_0^{(11)} &= p_m^2[1 + \kappa(p_m^2 + q^2)], & A_0^{(12)} &= (p_m^2 + q^2)^2, \\ A_0^{(21)} &= (p_m^2 + q^2)^2 - \lambda_0 t(\varphi_0)\, p_m^2[1 + \kappa(p_m^2 + q^2)], & A_0^{(22)} &= -\,p_m^2, \end{aligned} \tag{9}$$

а элементы матрицы A_j при $j \geq 1$ выражаются через производные по q и φ_0 j-го порядка элементов матрицы A_0 (см. формулы (15) в [2], в которых H_j следует заменить на A_j).

Рассмотрим уравнения (8) последовательно. При $j = 0$ имеем однородную систему уравнений $A_0X_0 = 0$. Из условия существования нетривиального решения этой системы находим

$$\lambda_0 (q, \varphi_0, p_m) = \frac{(p_m^2 + q^2)^2}{t(\varphi_0)p_m^2[1 + \kappa(p_m^2 + q^2)]} + \frac{p_m^2}{t(\varphi_0)(p_m^2 + q^2)^2}. \tag{10}$$

Кроме величин q, φ_0 и p_m функция λ_0 зависит от параметра κ, учитывающего поперечные сдвиги в оболочке. При $\kappa = 0$ приходим к классическому варианту, изученному ранее (см. § 5.1 в [3]). Здесь рассмотрим случай $0 < \kappa < 1$.

Фиксируя число m (а значит и параметр p_m), найдем

$$\lambda_0^0 = \min_{q,\varphi_0} \lambda (q, \varphi_0, p_m) = \lambda_0 (q^0, \varphi_0^0, p_m). \tag{11}$$

Возможны три случая: (a) $p_m > z_0$, (b) $p_m = z_0$, (c) $p_m < z_0$, где z_0 – положительный корень уравнения

$$z^4(2 + \kappa p_m z) - 2(1 + \kappa p_m z)^2 = 0. \tag{12}$$

Здесь ограничимся рассмотрением случаев (a) и (c), ибо условие $p_m \approx z_0$ требует перестройки асимптотических рядов (6).

При $p_m > z_0$ имеем

$$\lambda_0^0 = \frac{p_m^4 + \kappa p_m^2 + 1}{p_m^2(1 + \kappa p_m^2)}, \quad q^0 = 0, \tag{13}$$

а если $p_m < z_0$, то

$$\lambda_0^0 = \frac{z_0^4 + \kappa p_m z_0 + 1}{z_0^2(1 + \kappa p_m z_0)}, \quad q^0 = \sqrt{p_m(z_0 - p_m)}, \tag{14}$$

причем в обоих случаях образующая $\varphi = \varphi_0^0$ находится из условия

$$t'(\varphi_0) = 0. \tag{15}$$

В соотношениях (13), (14) было принято $t(\varphi_0^0) = 1$. Далее считаем

$$t''(\varphi_0^0) < 0. \tag{16}$$

Решение системы уравнений (8) при $j = 0$ запишем в виде

$$X_0(\xi) = P_0(\xi)Y^0, \tag{17}$$

где $P_0(\xi)$ неизвестный полином, а $Y^0 = (1, -A_0^{(11)}/A_0^{(12)})$ – двумерный вектор. Здесь и ниже верхний индекс ^{0} означает, что величина вычисляется при $\lambda_0 = \lambda_0^0$, $q = q^0$, $\varphi_0 = \varphi_0^0$.

При $j = 1$ система уравнений (8) является неоднородной. Однако при условиях (13), (15) или (14), (15) она обращается в систему тождеств.

Рассмотрим неоднородную систему (8), возникающую при $j = 2$. Условие ее совместности приводит к соотношениям для вычисления параметра a:

$$a = i(\lambda_{\varphi\varphi}^0/\lambda_{qq}^0)^{1/2}, \tag{18}$$

а также к уравнению относительно $P_0(\xi)$:

$$\frac{d^2P_0}{d\xi^2} - c\left(2\xi\frac{dP_0}{d\xi} + P_0\right) + \lambda_1 dP_0 = 0, \qquad (19)$$

где $c = -ia$, $d = 2/\lambda^0_{qq}$. Индексы q и φ в (18) и ниже означают дифференцирование по соответствующим величинам.

При

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = (1/2 + n)\sqrt{\lambda^0_{qq}\lambda^0_{\varphi\varphi}} \qquad (20)$$

уравнение (19) имеет решение в виде полинома Эрмита степени n:

$$P_0(\xi) = H_n(\theta),\ \theta = \sqrt{c}\,\xi. \qquad (21)$$

Неизвестные функции χ_{mj}, f_{mj} при $j \geq 1$ находятся из рассмотрения последующих приближений.

Пусть $p_m > z_0$, тогда формулы (18), (20) с учетом (13) дают

$$a = i\left\{\frac{p_m^2(1 + \kappa p_m^2)(p_m^4 + \kappa p_m^2 + 1)[-T''(\varphi_0)]}{2(\kappa p_m^6 - 2\kappa^2 p_m^4 - 4\kappa p_m^2 + 2p_m^4 - 2)}\right\}^{1/2},$$

$$\lambda_1^{(n)} = \left(\frac{1}{2} + n\right)\left\{\frac{2(p_m^4 + \kappa p_m^2 + 1)(\kappa p_m^6 - 2\kappa^2 p_m^4 - 4\kappa p_m^2 + 2p_m^4 - 2)[-T''(\varphi_0)]}{p_m^6(1 + \kappa p_m^2)^3}\right\}^{1/2}.$$

Аналогичные соотношения в случае $p_m < z_0$ в виду громоздкости здесь не приводятся.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Григолюк Э.И., Куликов Г.М.*** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. М., 1988. С. 34-35.
2. ***Mikhasev G., Seeger F., Gabbert U.*** Local Buckling of Composit Laminated Cylindrical Shells with Oblique Edges under External Pressure: Asymptotic and Finite Element Simulations // Technische Mechanik, Band 21, Heft 1, (2001). P. 1-12.
3. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек. М., 1995. – 320 с.

SUMMARY

The problem of local buckling of a thin composite laminated cylindrical shell under non-uniform axial load is studied. Each layer of the shell is assumed to be isotropic. Semi-membrane differential equations like the Donnel–Vlasov ones, taking into account transverse shears, and based on the generalized kinematic hypothesis of Timoshenko are utilized here as the governing equations. Presupposing that buckling takes place in a neighborhood of some so-called «weakest» generator, the asymptotic Tovstik's method is applied for finding the critical load and the eigenmodes.

Поступила в редакцию 19.04.2001