УДК 512.542

И.П. Шабалина

Формации групп с максимальной p-насыщенной нильпотентной подформацией

Все рассматриваемые нами группы конечны. Класс групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним, что подгрупповой функтор Скибы τ [1] сопоставляет каждой группе G такую систему её подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

В дальнейшем τ обозначает некоторый подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется p-насыщенной [2], если для любой группы G с $G/(\Phi(G) \cap O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация, состоящая лишь из нильпотентных групп, называется нильпотентной. Максимальной τ-замкнутой p-насыщенной подформацией τ-замкнутой p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая её собственная τ-замкнутая p-насыщенная подформация $\mathfrak{M}$, что для любой τ-замкнутой p-насыщенной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ выполняется $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$. В частности, максимальной p-насыщенной подформацией p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая её собственная p-насыщенная подформация $\mathfrak{M}$, что для любой p-насыщенной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ выполняется $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$.

В настоящей статье изучаются τ-замкнутые p-насыщенные ненильпотентные формации с максимальной p-насыщенной нильпотентной подформацией.

Напомним некоторые определения и обозначения [3-5].

Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных в G подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2.1 ([1], с.26). *Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная непустая формация и пусть у каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых G-главных факторов. Тогда если A – монолитическая группа из* $\mathrm{form}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, *то* $A \in H(\mathfrak{X})$.

Минимальная ненильпотентная группа называется группой Шмидта.

Лемма 2.2 ([6]). *Пусть G – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G – *разрешимая бипримарная группа;*

2) $G^{\mathfrak{N}}$ *является силовской* q*-подгруппой в* G, q – *простое число;*

3) $G/G^{\mathfrak{N}}$ – *циклическая p-группа*, p – *простое число;*

4) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ – *главный фактор группы* G, *причём если* $|G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})| = q^b$, *то* $q^b \equiv 1 \pmod p$ *и* b *есть показатель числа* q *по модулю* p;

5) *Если* $P = \langle a \rangle$ – *силовская* p*-подгруппа из* G, *то* $a^p \in Z(G)$;

6) *Если $G^{\mathfrak{N}}$ абелева, то $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.*

Лемма 2.3 ([3], с. 244). *Пусть G – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G порождается двумя элементами;*

2) $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = G^{\mathfrak{N}} \bigcap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathfrak{N}})$;

3) $\Phi(G)$ *совпадает с гиперцентром группы G;*

4) *Если $G^{\mathfrak{N}}$ неабелева, то её центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;*

5) *Если $p > 2$, то $G^{\mathfrak{N}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathfrak{N}}$ не превышает 4.*

Лемма 2.4 ([7]). *При заданных p, α, q существует единственная группа Шмидта G максимального порядка $p^{\alpha}q^{\beta_0}$, где $\beta_0 = b$ при $b \equiv 1 \pmod 2$, $\beta_0 = \frac{3}{2}b$ при $b \equiv 0 \pmod 2$ (здесь b – показатель числа q по модулю p). Все остальные группы Шмидта порядка $p^{\alpha}q^{\beta}$ изоморфны фактор-группам группы G по её центральным нормальным подгруппам.*

Лемма 2.5 ([8]). *Решётка τ-замкнутых p-насыщенных формаций в l_{τ}^{p} модулярна.*

Лемма 2.6 ([4], с.47). *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым монолитом. Тогда если $A \in l\mathrm{form}(\mathfrak{M})$, то $A \in H(\mathfrak{M})$.*

Напомним, что если τ-замкнутая p-насыщенная формация ненильпотентна, но нильпотентна каждая её собственная τ-замкнутая p-насыщенная подформация, то $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой p-насыщенной ненильпотентной формацией.

Символом $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех таких τ-замкнутых формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$, а символом $\tau^{p}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ – пересечение всех τ-замкнутых p-насыщенных формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

H называется τ-подгруппой группы G, если $H \in \tau(G)$,

Лемма 2.7 ([9]). *Формация $\mathfrak{H}$ является минимальной τ-замкнутой p-насыщенной формацией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H} = \tau^{p}\mathrm{form}(H)$, где H – монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{N}}$ и либо R – p'-группа и все собственные τ-подгруппы группы H нильпотентны, либо R – pd-группа и H – группа одного из следующих типов:*

a) *H – группа Шмидта;*

b) *H – такая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_p$-группа, что $R = H^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева группа.*

Лемма 2.8 ([4],с.81). *Пусть $A \in \mathrm{form}(G)$, где G – конечная группа. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *экспонента группы A не превосходит экспоненту группы G;*

2) *каждый главный фактор группы A изоморфен некоторому главному фактору группы G.*

Лемма 2.9 ([10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная подформация.*

Всякую функцию вида

$$f : \{p, p'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют p-локальным спутником. Спутник f называется τ-значным, если каждое его значение является τ-замкнутой формацией. Мы используем G_{pd} для обозначения наибольшей нормальной подгруппы в G, у которой каждый композиционный фактор – pd-группа. Для любой непустой совокупности групп $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G)) \mid G \in \mathfrak{F}), \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, \qquad \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Минимальным τ-значным р-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$ называется её р-локальный спутник f со следующими значениями:

$$f(p) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{F}(F_p)) \text{ и } f(p') = \tau\mathrm{form}(G/G_{pd}) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

На множестве всех подгрупповых функторов введём частичный порядок $\leq$, полагая, что $\tau_1 \leq \tau_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$. Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_i \mid i \in I\}$ определим их пересечение $\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$:

$$\tau(G) = \bigcap_{i\in I} \tau_i(G)$$

для любой группы $G \in \mathfrak{X}$. Подгрупповой функтор назовём замкнутым, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$.

Следуя [1], введём следующее обозначение. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{X})$ обозначим множество всех таких групп H, что $H \in \bar{\tau}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$($\bar{\tau}$ – пересечение всех таких замкнутых подгрупповых функторов τ_i, для которых $\tau \leq \tau_i$).

Лемма 2.10 ([1], с.24). *Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство* $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = HR_0S_{\bar{\tau}}(\mathfrak{X})$.

Следуя [1], мы обозначаем через s и s_n соответственно такие подгрупповые функторы, что для любой группы G s(G) – множество всех подгрупп в G, а $s_n(G)$ – множество всех нормальных подгрупп в G.

Лемма 2.11 ([11]). *Всякая нильпотентная формация s-замкнута.*

Легко видеть, что множество l_τ^p всех τ-замкнутых р-насыщенных формаций является полной решёткой. Если $\Omega = \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\}$ – произвольное двухэлементное подмножество этой решётки, то символом $\mathfrak{X}_1 \vee_\tau^p \mathfrak{X}_2$ обозначается верхняя грань для Ω в l_τ^p.

Лемма 2.12. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ – минимальная τ-замкнутая р-насыщенная ненильпотентная формация, $\mathfrak{M}$ – р-насыщенная нильпотентная формация. Тогда если $\mathfrak{H}$ – некоторая минимальная τ-замкнутая р-насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{M} \vee_\tau^p \mathfrak{H}_1$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\tau^p \mathfrak{H}_1$ и f, m, h, h_1 – минимальные τ-значные р-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ соответственно.

Согласно определению минимального τ-значного р-локального спутника формации $f(a) = \tau\mathrm{form}(m(a) \cup h_1(a))$ для всякого $a \in \{p\} \cup \{p'\}$ и

$$m(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = p \in \pi(\mathfrak{M}); \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(\mathfrak{M}); \\ \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{p'}, & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Следовательно, спутник f допускает следующее описание:

$$f(a) \subseteq \tau\mathrm{form}((1) \cup h_1(a)), \text{ если } a = p \text{ и } f(p') = \tau\mathrm{form}((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{p'}) \cup h_1(p')).$$

Ввиду леммы 2.7 $\mathfrak{H} = \tau^p\mathrm{form}(H)$, где H – такая монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:

1) $H = [R]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(H) = 1$, где $R = O_p(H)$ и $|Q| = q$ – простое число;

2) $R = H^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева pd-группа и все собственные τ-подгруппы группы H – p-группы;

3) R – p′-группа и все собственные τ-подгруппы группы H нильпотентны.

Пусть относительно группы H выполняется условие 1). Так как $H \in \mathfrak{F}$, то

$$Q \cong H/R \cong H/F_p(H) \in f(p).$$

Тогда

$$Q \in \tau\mathrm{form}((1) \cup h_1(p)).$$

Докажем, что $\tau\mathrm{form}(Q) = \mathrm{form}(Q)$. Очевидно, что $\mathrm{form}(Q) \subseteq \tau\mathrm{form}(Q)$. Покажем, что $\tau\mathrm{form}(Q) \subseteq \mathrm{form}(Q)$. Ввиду условия леммы Q – нильпотентная группа, значит, form(Q) является нильпотентной формацией. Согласно лемме 2.11 формация form(Q) s-замкнута и, следовательно, τ-замкнута. Так как τform(Q) – наименьшая τ-замкнутая формация, содержащая Q, то $\tau\mathrm{form}(Q) \subseteq \mathrm{form}(Q)$. Таким образом, $\tau\mathrm{form}(Q) = \mathrm{form}(Q)$.

Так как Q – простая группа, то ввиду леммы 2.8 Q изоморфна некоторому главному фактору некоторой группы $G \in \{(1) \cup h_1(p)\}$. Так как $Q \neq 1$, то $G \in h_1(p)$. По лемме 2.7 $H_1 = \tau^p\mathrm{form}(H_1)$, где H_1 – такая монолитическая группа с монолитом $R_1 = H_1^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:

a) $H_1 = [R_1]Q_1$ – pd-группа Шмидта с $\Phi(H_1) = 1$, где $R_1 = O_p(H_1)$ и $|Q_1| = q_1$ – простое число;

b) $R = H_1^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева pd-группа и все собственные τ-подгруппы группы H_1 – p-группы;

c) R_1 - p′-группа и все собственные τ-подгруппы группы H_1 нильпотентны.

Пусть относительно группы H_1 выполняется условие a). Тогда

$$h_1(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(Q_1), & \text{если } a = p; \\ \tau\mathrm{form}(Q_1), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Следовательно, $G \in \tau\mathrm{form}(Q_1)$. Так как $\tau\mathrm{form}(Q_1) = \mathrm{form}(Q_1)$, то каждый главный фактор группы G изоморфен Q_1. Отсюда получаем $Q \cong Q_1$. Таким образом, $\pi(H) = \pi(H_1)$. Следовательно, ввиду лемм 2.2, 2.3 и 2.4, $H \cong H_1$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$.

Пусть относительно группы H_1 выполняется условие b). Так как $R_1 = H_1^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева pd-группа, то $F_p(H_1) = 1$ и $H_1/R_1 \in \mathfrak{N}_p$. Тогда

$$h_1(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(H_1), & \text{если } a = p; \\ (1), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Ввиду леммы 2.10

$$h_1(p) = \tau\mathrm{form}(H_1) = \mathrm{form}(S_{\bar\tau}(H_1)), \text{ где } S_{\bar\tau}(H_1) = \{\{H_1\} \cup \{M_1, M_2, \ldots, M_t\} \mid M_i \neq H_1 \text{ и } M_i \in S_{\bar\tau}(H_1) \text{ для любого } i = 1, 2, \ldots, t\}.$$

Так как

$$Q \in \tau\mathrm{form}\{(1) \cup h_1(p)\} \subseteq h_1(p)$$

(очевидно, что $h_1(p) \neq \varnothing$), то $Q \in h_1(p)$.

Так как по условию $M_i \in \mathfrak{N}_p$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$, то $M_i^{\mathfrak{N}_p} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Кроме того, $H_1^{\mathfrak{N}_p} = R_1$.

Покажем, что $R_1 \not\subseteq \Phi(H_1)$. Предположим противное. Подгруппа Фраттини нильпотентна, следовательно, подгруппа R_1 также нильпотентна, а значит, разрешима, и поэтому она абелева. Противоречие с условием. Итак, $R_1 \not\subseteq \Phi(H_1)$. Мы видим, что у каждой группы T из $S_{\bar\tau}(H_1)$ $\mathfrak{N}_p$–корадикал не имеет Т-фраттиниевых главных факторов. Понятно, что Q – монолитическая группа из $h_1(p) \setminus \mathfrak{N}_p$. Тогда ввиду леммы 2.1 $Q \in H(S \mathop{\cdot}\limits_{\tau} (H_1))$, т.е. либо Q – гомоморфный образ группы M_i для некоторого i = 1, 2, ..., t, либо Q – гомоморфный образ группы H_1. Группа Q не может быть гомоморфным образом группы M_i, так как гомоморфным образом p-группы может быть только p-группа, а Q – q-группа, где $q \neq p$. Пусть Q – гомоморфный образ группы H_1. По теореме о гомоморфизме $H_1/Ker\varphi \cong Q$, т.е. $H_1/Ker\varphi$ – q-группа. Предположим, что $R_1 \not\subseteq Ker\varphi$. Тогда $Ker\varphi = 1$, т.к. R_1 – единственная минимальная нормальная подгруппа группы H_1, и

$$H_1/Ker\varphi \cong H_1/1 \cong H \cong Q,$$

т.е. H_1 – q-группа, что невозможно. Пусть $R_1 \subseteq Ker\varphi \subseteq H_1$. По условию $H_1/R_1 \in \mathfrak{N}_p$. Понятно, что

$$H_1/Ker\varphi \cong (H_1/ R_1)/(Ker\varphi /R_1) \in \mathfrak{N}_p.$$

С другой стороны, $H_1/Ker\varphi \cong Q \in \mathfrak{N}_q$. Это невозможно, так как p, q – простые числа и $p \neq q$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что $Q \notin H(S \mathop{\cdot}\limits_{\tau} (H_1))$. Значит, относительно группы H_1 условие b) не может иметь места.

Пусть теперь относительно группы H_1 выполняется условие c). Тогда $(H_1)_{pd} = 1$. Так как R_1 – p'-группа и $H_1/R_1 \in \mathfrak{N}$, то $F_p(H_1) = H_1$. Следовательно,

$$h_1(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = p \in \pi(H_1); \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(H_1); \\ \tau form(H_1), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Так как $Q \in \tau form\{(1) \bigcup h_1(p)\} = \tau form(1)$, то Q = 1. Противоречие. Следовательно, относительно H_1 рассматриваемый случай невозможен.

Условия 2) и 3) рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Символом $\mathfrak{F} /^p_\tau \mathfrak{F}_0$ обозначается [1] такая подрешетка решетки l^p_τ, которая состоит из всех τ-замкнутых p-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_0$ ($\mathfrak{F}$ – непустая τ-замкнутая p-насыщенная формация). Мы говорим, что $\mathfrak{F}_0$ – максимальная τ-замкнутая p-насыщенная подформация τ-замкнутой p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}_0 \neq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} /^p_\tau \mathfrak{F}_0 = \{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0\}$.

Теорема 3.1. *В том и только в том случае τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную τ-замкнутую p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p_\tau \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$M \vee^p_\tau (H \bigcap N);$$

2) всякая τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^p_\tau (\mathfrak{F}_1 \bigcap N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Так как $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация, то по лемме 2.9 в формации $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}$. Так как при этом $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \bigcap \mathfrak{F}$ – максимальная τ-замкнутая p-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p_\tau \mathfrak{H}$. Следовательно, по лемме 2.12 в $\mathfrak{F}$ нет минимальных τ-замкнутых p-насыщенных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$. Ясно, что $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H}$ – максимальная τ-замкнутая p-насыщенная подформация в $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 2.5 и решеточного изоморфизма

$$((\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{M})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{M}\cong\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}\mathfrak{H}\cap((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{M})=\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N},$$

получаем, что $(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{M}$ – максимальная τ-замкнутая p-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}$, то всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{M}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ – произвольная τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 2.9 $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}_1$. Следовательно, ввиду леммы 2.5 имеет место $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\cap(\mathfrak{H}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{M})=\mathfrak{H}\vee_{\tau}^{p}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{M})$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – p-насыщенная нильпотентная формация, а $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация. И пусть $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ – максимальная τ-замкнутая p-насыщенная подформация в H. Тогда ввиду леммы 2.5 и решеточного изоморфизма получаем

$$\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1=(\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1)\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1\cong\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}(\mathfrak{M}\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1)\cap\mathfrak{H}=$$

$$=\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H})\vee_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}/_{\tau}^{p}\mathfrak{H}_1.$$

Следовательно, формация $\mathfrak{F}_1$ является максимальной τ-замкнутой p-насыщенной подформацией в $\mathfrak{F}$. Но формация $\mathfrak{F}_1$ нильпотентна. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. Мн., 1997. – 240 с.
2. ***Шеметков Л.А.*** О произведении формаций // Докл. АН БССР, 1984. Т. 28, № 2. С. 101-103.
3. ***Шеметков Л. А.*** Формации конечных групп. М., 1978. – 272 с.
4. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. М., 1989. – 253 с.
5. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. Walter de Gruyter. Berlin, New York, 1992. – 889 p.
6. ***Шмидт О.Ю.*** Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб., 1924. Т.31. С. 366-372.
7. ***Гольфанд Ю.А.*** О группах, все подгруппы которых специальные // ДАН СССР, 1948. Т. 60, № 8. С. 1313-1315.
8. ***Шабалина И.П.*** Формации конечных групп с максимальной τ-замкнутой p-насыщенной нильпотентной подформацией. Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. Гомель, 2001, №113(8). – 6 с.
9. ***Селькин В.М.*** Минимальные τ-замкнутые p-локальные ненильпотентные формации // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2000, №3(16). С. 48-51.
10. ***Вишневская Т.Р.*** Некоторые приложения теоремы о факторизациях однопорождённых p-насыщенных формаций // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины, 2001. №3(108). С. 15.
11. ***Neumann P.M.*** A note on formations of finite nilpotent groups // Bull. London Math. Soc., 1970. V. 2, № 1. P. 91.

S U M M A R Y

This paper studies the τ-closed p-saturated non-nilpotent formations with maximal p-saturated nilpotent subformation.

Поступила в редакцию 6.06.2001